

## ÍNDICE GENERAL

<b>Introducción</b>	<b>6</b>
<b>1 Desigualdad de Simpson y espacios <math>L^p</math></b>	<b>7</b>
1.1 Desigualdad de Simpson en Términos de la Norma-p . . . . .	7
1.2 <b>Aplicaciones</b> . . . . .	18
1.3 Generalizaciones . . . . .	28
<b>Conclusiones y Recomendaciones</b>	<b>50</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>50</b>

# CAPÍTULO 1

## DESIGUALDAD DE SIMPSON Y ESPACIOS $L^p$

En este capítulo se trabajará con la Desigualdad de Simpson, la Fórmula de la cuadratura de Simpson en términos de la norma- $p$  para funciones que admiten derivadas de orden  $n$ -ésimo en  $L_p(a, b)$ , con  $p \geq 2$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  tales que  $a < b$  y  $n \leq 4$ . Después, se mostrarán algunas medias conocidas y las aplicaciones de los resultados expuestos en este capítulo para proporcionar desigualdades que envuelvan a las mismas.

### 1.1 Desigualdad de Simpson en Términos de la Norma- $p$

En este capítulo se proporcionarán nuevas cotas para la Desigualdad de Simpson. Como se ha explicado en el Capítulo 1, sección ?? se tiene que para una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  admite derivadas hasta el cuarto orden en el intervalo  $[a, b]$  y cuya cuarta derivada esta acotada, se satisface lo siguiente:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{6} \left[ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \right| \leq \frac{(b-a)^5}{2880} \|f^{IV}\|_\infty$$

Sin embargo, como ya se ha indicado previamente en la introducción de este trabajo, en muchas aplicaciones, la función  $f$  no necesariamente admite cuarta derivada en  $(a, b)$ , o, en el caso de su existencia,  $f^{IV}$  no necesariamente se encuentra acotada en el mismo.

Por esta razón, en los últimos años, varios autores han proporcionado versiones de la Desigualdad de Simpson para clases más amplias de funciones.

Por ejemplo, en el año 2000, S.S. Dragomir demostró en [45] el siguiente resultado:

**Teorema 1.** *Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $L$ -lipschitziana, entonces se tiene la desigualdad:*

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{6} \left[ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \right| \leq \frac{5}{36} L(b-a)^2.$$

En el año 1999, S.S. Dragomir, junto con P. Cerone y R.P. Agarwal, demostraron en [24] el siguiente resultado:

**Teorema 2.** *Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función que es de variación acotada sobre  $[a, b]$ , entonces se satisface la siguiente desigualdad:*

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{6} \left[ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \right| \leq \frac{b-a}{3} \bigvee_a^b f.$$

Por último, en el año 2002, Nenad Ujevic demostró en [14] el siguiente resultado para la fórmula de cuadratura de Simpson compuesta:

**Teorema 3.** *Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable tal que existen números reales  $\gamma, \Gamma \in \mathbb{R}$  tales que*

$$\gamma \leq f'(t) \leq \Gamma \quad \text{para todo } t \in [a, b]$$

*Entonces se satisface la desigualdad:*

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{6N} \sum_{k=0}^{n-1} \left[ f(x_k) + f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) + f(x_{k+1}) \right] \right| \leq \frac{5(\Gamma - \gamma)}{72N} (b-a)^2$$

En esta sección se tratará sobre funciones cuyas derivadas están en  $L^p[a, b]$ , con  $p \in [1, \infty]$ . Se comenzará mediante la introducción de un lema que será de utilidad para los resultados principales de este capítulo:

**Lema 1.** *Sea  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  una función que admite derivadas hasta orden  $n$ , con  $n \leq 4$ , y sea*

$$\mathfrak{R}(f, [a, b]) = \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{6} \left[ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

*entonces se tiene:*

- Para  $f$  diferenciable ( $n = 1$ ), se tiene que

$$\mathfrak{R}(f, [a, b]) = \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left( x - \frac{5a+b}{6} \right) f'(x) dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left( x - \frac{5b+a}{6} \right) f'(x) dx. \quad (1.1)$$

- Si  $n = 2$ , entonces

$$\mathfrak{R}(f, [a, b]) = \frac{1}{2} \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a) \left( x - \frac{2a+b}{3} \right) f''(x) dx + \frac{1}{2} \int_{\frac{a+b}{2}}^b (x-b) \left( x - \frac{2b+a}{3} \right) f''(x) dx \quad (1.2)$$

- Si  $n = 3$ , entonces:

$$\mathfrak{R}(f, [a, b]) = -\frac{1}{6} \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)^2 \left( x - \frac{a+b}{2} \right) f'''(x) dx - \frac{1}{6} \int_{\frac{a+b}{2}}^b (x-b)^2 \left( x - \frac{a+b}{2} \right) f'''(x) dx \quad (1.3)$$

- Si  $n = 4$ , entonces

$$\mathfrak{R}(f, [a, b]) = \frac{1}{24} \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)^3 \left( x - \frac{a+b}{2} \right) f^{(IV)}(x) dx + \frac{1}{24} \int_{\frac{a+b}{2}}^b (x-b)^3 \left( x - \frac{a+b}{2} \right) f^{(IV)}(x) dx \quad (1.4)$$

**Demostración:**

Se considerarán los siguientes casos:

- Para  $n = 1$ , mediante integración por partes, se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
\int_a^b s(x) f'(x) dx &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} s(x) f'(x) dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b s(x) f'(x) dx \\
&= \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left( x - \frac{5a+b}{6} \right) f'(x) dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left( x - \frac{a+5b}{6} \right) f'(x) dx \\
&= \left( x - \frac{5a+b}{6} \right) f(x) \Big|_a^{\frac{a+b}{2}} - \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx - \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) dx \\
&\quad + \left( x - \frac{a+5b}{6} \right) f(x) \Big|_{\frac{a+b}{2}}^b \\
&= \left[ \frac{a+b}{2} - \frac{5a+b}{6} \right] f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \left( a - \frac{5a+b}{6} \right) f(a) \\
&\quad + \left( b - \frac{5b+a}{6} \right) f(b) - \left( \frac{a+b}{2} - \frac{a+5b}{6} \right) f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \int_a^b f(x) dx \\
&= f\left(\frac{a+b}{2}\right) \left[ \frac{a+5b-(5a+b)}{6} \right] - af(a) + bf(b) + \left( \frac{5a+b}{6} \right) f(a) \\
&\quad - \left( \frac{a+5b}{6} \right) f(b) - \int_a^b f(x) dx \\
&= 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \left( \frac{b-a}{3} \right) - \frac{-6af(a) + 6bf(b) + 5af(a) + bf(a) - af(b)}{6} \\
&\quad - \frac{5bf(b)}{6} - \int_a^b f(x) dx \\
&= 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \left( \frac{b-a}{3} \right) + \frac{-af(a) + bf(b) + bf(a) - af(b)}{6} - \int_a^b f(x) dx \\
&= 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \left( \frac{b-a}{3} \right) + \frac{f(a)(b-a) + f(b)(b-a)}{6} - \int_a^b f(x) dx \\
&= \frac{b-a}{3} \left[ \frac{f(a) + f(b)}{2} + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] - \int_a^b f(x) dx.
\end{aligned}$$

esto es:

$$\mathfrak{R}(f, [a, b]) = \frac{b-a}{3} \left[ \frac{f(a) + f(b)}{2} + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] - \int_a^b f(x) dx.$$

- Para  $n = 2$ , mediante integración por partes, se tiene

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a) \left(x - \frac{2a+b}{3}\right) f''(x) dx + \frac{1}{2} \int_{\frac{a+b}{2}}^b (x-b) \left(x - \frac{2b+a}{3}\right) f''(x) dx \\
&= \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{b-a}{2}\right) \left(\frac{b-a}{6}\right) f'\left(\frac{a+b}{2}\right) - \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(2x - \frac{5a+b}{3}\right) f'(x) dx - \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{a-b}{2}\right) \left(\frac{a-b}{6}\right) f'\left(\frac{a+b}{2}\right) - \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(2x - \frac{5b+a}{3}\right) f'(x) dx \right] \\
&= - \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(x - \frac{5a+b}{6}\right) f'(x) dx - \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(x - \frac{5b+a}{6}\right) f'(x) dx.
\end{aligned}$$

Ahora bien, en particular,  $f$  es diferenciable, por ende se puede aplicar (1.1) al resultado anterior y se obtiene (1.2).

- Para  $n = 3$ , mediante integración por partes, se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{6} \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)^2 \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'''(x) dx - \frac{1}{6} \int_{\frac{a+b}{2}}^b (x-b)^2 \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'''(x) dx \\
&= -\frac{1}{6} \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x^2 - 2ax + a^2) \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'''(x) dx \\
&\quad - \frac{1}{6} \int_{\frac{a+b}{2}}^b (x^2 - 2bx + b^2) \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'''(x) dx \\
&= -\frac{1}{6} \left[ (x^2 - 2ax + a^2) \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f''(x) \Big|_a^{\frac{a+b}{2}} - \int_a^{\frac{a+b}{2}} 2(x-a) \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f''(x) dx \right. \\
&\quad \left. - \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)^2 f''(x) dx + (x-b)^2 \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f''(x) \Big|_{\frac{a+b}{2}}^b \right. \\
&\quad \left. - \int_{\frac{a+b}{2}}^b 2(x-b) \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f''(x) dx - \int_{\frac{a+b}{2}}^b (x-b)^2 f''(x) dx \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{6} \left[ -\int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)(3x-2a-b)f''(x) dx - \int_{\frac{a+b}{2}}^b (x-b)(3x-2b-a) dx \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[ \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)\left(x - \frac{2a+b}{3}\right)f''(x) dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (x-b)\left(x - \frac{2b+a}{3}\right)f''(x) dx \right].
\end{aligned}$$

Ahora bien, en particular,  $f$  admite segunda derivada en  $[a, b]$  y es absolutamente continua en  $[a, b]$ , por ende,  $f$  satisface (1.2). Combinando esta identidad con la última expresión, se obtiene (1.3).

- Para  $n = 4$ , se tiene que:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{24} \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)^3 \left(x - \frac{a+2b}{3}\right) f^{IV}(x) dx + \frac{1}{24} \int_{\frac{a+b}{2}}^b (x-b)^3 \left(x - \frac{b+2a}{3}\right) f^{IV}(x) dx \\
&= \frac{1}{24} \left[ (x-a)^3 \left(x - \frac{a+2b}{3}\right) f'''(x) \Big|_a^{\frac{a+b}{2}} - \int_a^{\frac{a+b}{2}} 3(x-a)^2 \left(x - \frac{a+2b}{3}\right) f'''(x) dx \right. \\
&\quad \left. - \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)^3 f'''(x) dx \right] \\
&+ \frac{1}{24} \left[ (x-b)^3 \left(x - \frac{b+2a}{3}\right) f'''(x) \Big|_{\frac{a+b}{2}}^b - \int_{\frac{a+b}{2}}^b 3(x-b)^2 \left(x - \frac{b+2a}{3}\right) f'''(x) dx \right. \\
&\quad \left. - \int_{\frac{a+b}{2}}^b (x-b)^3 f'''(x) dx \right] \\
&= \frac{1}{24} \left[ \left(\frac{b-a}{2}\right)^3 \left(\frac{a-b}{2}\right) f'''(\frac{a+b}{2}) - \int_a^{\frac{a+b}{2}} f'''(x)(x-a)^2(4x-2a-2b) dx \right] \\
&+ \frac{1}{24} \left[ \left(\frac{b-a}{2}\right)^3 \left(\frac{b-a}{2}\right) f'''(\frac{a+b}{2}) - \int_{\frac{a+b}{2}}^b f'''(x)(x-b)^2(4x-2a-2b) dx \right] \\
&= -\frac{1}{6} \int_a^{\frac{a+b}{2}} f'''(x)(x-a)^2 \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx - \frac{1}{6} \int_{\frac{a+b}{2}}^b (x-b)^2 \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'''(x) dx.
\end{aligned}$$

Ahora bien, en particular,  $f$  es una función que admite tercera derivada en  $(a, b)$  y  $f'''$  es absolutamente continua en  $[a, b]$ . Por ende, se puede combinar (1.3) con el apartado anterior y obtener:

$$\begin{aligned}
\Re(f, [a, b]) &= -\frac{1}{6} \int_a^{\frac{a+b}{2}} f'''(x)(x-a)^2 \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx \\
&\quad - \frac{1}{6} \int_{\frac{a+b}{2}}^b (x-b)^2 \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'''(x) dx. \\
&= \frac{1}{24} \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)^3 \left(x - \frac{a+2b}{3}\right) f^{(IV)}(x) dx \\
&\quad + \frac{1}{24} \int_{\frac{a+b}{2}}^b (x-b)^3 \left(x - \frac{b+2a}{3}\right) f^{(IV)}(x) dx.
\end{aligned}$$

■

**Teorema 4.** Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  tales que  $a < b$ ,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $[a, b]$  y diferenciable en  $(a, b)$ , cuya derivada pertenece a  $L_p[a, b]$ . Entonces se satisface la siguiente desigualdad:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{3} \left[ \frac{f(a)+f(b)}{2} + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] \right| \leq \frac{1}{6} \left[ \frac{2^{q+1}+1}{3(q+1)} \right]^{\frac{1}{q}} (b-a)^{1+\frac{1}{q}} \|f'\|_p. \quad (1.5)$$

donde  $p, q \in [1, +\infty)$  son tales que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

**Demostración:** Sea  $s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$s(x) = \begin{cases} x - \frac{5a+b}{6} & \text{si } x \in [a, \frac{a+b}{2}], \\ x - \frac{a+5b}{6} & \text{si } x \in [\frac{a+b}{2}, b]. \end{cases}$$

Así, por 1.1 del lema previo, se tiene lo siguiente

$$\int_a^b s(x) f'(x) dx = \frac{b-a}{3} \left[ \frac{f(a)+f(b)}{2} + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] - \int_a^b f(x) dx. \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b s(x) f'(x) dx \right| &\leq \|s\|_q \|f'\|_p \\
&= \left( \int_a^b |s(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \|f'\|_p.
\end{aligned} \quad (1.7)$$



Ahora bien:

$$\begin{aligned}
\int_a^b |s(x)|^q dx &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left| x - \frac{5a+b}{6} \right|^q dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left| x - \frac{a+5b}{6} \right|^q dx \\
&= \int_a^{\frac{5a+b}{6}} \left( \frac{5a+b}{6} - x \right)^q dx + \int_{\frac{5a+b}{6}}^{\frac{a+b}{2}} \left( x - \frac{5a+b}{6} \right)^q dx + \\
&\quad + \int_{\frac{a+b}{2}}^{\frac{a+5b}{6}} \left( \frac{a+5b}{6} - x \right)^q dx + \int_{\frac{a+5b}{6}}^b \left( x - \frac{a+5b}{6} \right)^q dx \\
&= \frac{1}{q+1} \left[ - \left( \frac{5a+b}{6} - x \right)^{q+1} \Big|_a^{\frac{5a+b}{6}} + \left( x - \frac{5a+b}{6} \right)^{q+1} \Big|_{\frac{5a+b}{6}}^{\frac{a+b}{2}} \right. \\
&\quad \left. - \left( \frac{a+5b}{6} - x \right)^{q+1} \Big|_{\frac{a+b}{2}}^{\frac{a+5b}{6}} + \left( x - \frac{a+5b}{6} \right)^{q+1} \Big|_{\frac{a+5b}{6}}^b \right] \\
&= \frac{1}{q+1} \left[ \left( \frac{5a+b}{6} - a \right)^{q+1} + \left( \frac{a+b}{2} - \frac{5a+b}{6} \right)^{q+1} \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{a+5b}{6} - \frac{a+b}{2} \right)^{q+1} + \left( b - \frac{a+5b}{6} \right)^{q+1} \right] \\
&= \frac{(2^{q+1} + 1)(b-a)^{q+1}}{3(q+1)6^q}.
\end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}
\left[ \int_a^b |s(x)|^q dx \right]^{\frac{1}{q}} &= \left[ \frac{(2^{q+1} + 1)(b-a)^{q+1}}{3(q+1)6^q} \right]^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{1}{6} \left[ \frac{2^{q+1} + 1}{3(q+1)} \right]^{\frac{1}{q}} (b-a)^{\frac{q+1}{q}} \\
&= \frac{1}{6} \left[ \frac{2^{q+1} + 1}{3(q+1)} \right]^{\frac{1}{q}} (b-a)^{1+\frac{1}{q}}.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Sustituyendo (1.6) y (1.8) en (1.7), se tiene demostrado el Teorema (4). ■

De este teorema, se desprenden dos corolarios importantes que se mostrarán a continuación:

**Corolario 1.** Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  tales que  $a < b$ ,  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  continua en  $[a, b]$  y diferenciable en  $(a, b)$ , tal que  $f' \in L_p[a, b]$ . Si  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  una partición de

$[a, b]$ . Entonces el error  $R_S(f, P, I)$  que se obtiene al aplicar la Regla de Simpson satisface lo siguiente:

$$|R_S(f, P)| \leq \frac{1}{6} \left[ \frac{2^{q+1} + 1}{3(q+1)} \right]^{\frac{1}{q}} \|f'\|_p \left( \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^{q+1} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

### **Demostración:**

Para  $i = 0, 1, \dots, n-1$ ,  $[x_i, x_{i+1}] \subset [a, b]$ , como  $f$  es una función continua en  $[x_i, x_{i+1}]$ , derivable en  $(x_i, x_{i+1})$ , y satisface

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x)|^p dx \leq \int_a^b |f'(x)|^p dx < \infty.$$

como  $f' \in L_p[a, b]$ , entonces  $f' \in L_p[x_i, x_{i+1}]$ , entonces para  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , y en virtud del Teorema (4)

$$\begin{aligned} & \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx - \frac{x_{i+1} - x_i}{3} \left[ \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} + 2f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \right] \right| \\ & \leq \frac{1}{6} \left[ \frac{2^{q+1} + 1}{3(q+1)} \right]^{\frac{1}{q}} (x_{i+1} - x_i)^{1+\frac{1}{q}} \left( \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f'(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

para  $i = 0, 1, \dots, n-1$ . Sumando en la desigualdad anterior, sobre  $i = 0, \dots, n-1$ , y en virtud de la desigualdad ?? y el Teorema 4, se obtiene:

$$\begin{aligned} |R_S(f, P)| &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx - \frac{x_{i+1} - x_i}{3} \left[ \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} + 2f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \right] \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx - \frac{x_{i+1} - x_i}{3} \left[ \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} + 2f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \right] \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{6} \left[ \frac{2^{q+1} + 1}{3(q+1)} \right]^{\frac{1}{q}} (x_{i+1} - x_i)^{1+\frac{1}{q}} \left( \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f'(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \frac{1}{6} \left[ \frac{2^{q+1} + 1}{3(q+1)} \right]^{\frac{1}{q}} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^{1+\frac{1}{q}} \left( \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f'(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Usando la Desigualdad Discreta de Hölder, se obtiene

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{6} \left[ \frac{2^{q+1} + 1}{3(q+1)} \right]^{\frac{1}{q}} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^{1+\frac{1}{q}} \left( \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f'(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \leq \frac{1}{6} \left[ \frac{2^{q+1} + 1}{3(q+1)} \right]^{\frac{1}{q}} \left( \sum_{i=0}^{n-1} \left( (x_{i+1} - x_i)^{1+\frac{1}{q}} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \left( \sum_{i=0}^{n-1} \left( \left( \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f'(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
& = \frac{1}{6} \left[ \frac{2^{q+1} + 1}{3(q+1)} \right]^{\frac{1}{q}} \left( \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^{q+1} \right)^{\frac{1}{q}} \left( \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f'(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
& = \frac{1}{6} \left[ \frac{2^{q+1} + 1}{3(q+1)} \right]^{\frac{1}{q}} \left( \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^{q+1} \right)^{\frac{1}{q}} \left( \int_a^b |f'(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
& = \frac{1}{6} \left[ \frac{2^{q+1} + 1}{3(q+1)} \right]^{\frac{1}{q}} \left( \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^{q+1} \right)^{\frac{1}{q}} \|f'\|_p.
\end{aligned}$$

■

**Corolario 2.** Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  tales que  $a < b$ ,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua en  $[a, b]$  y diferenciable en  $(a, b)$ , tal que  $f' \in L_p[a, b]$ . Si  $n \in \mathbb{N}$  y  $P_n$  una partición equidistante de  $[a, b]$ , con  $n$  subintervalos, entonces el Error del Método de Simpson,  $R_S(f, P_n)$ , satisface lo siguiente:

$$|R_S(f, P_n)| \leq \frac{1}{6n} \left[ \frac{2^{q+1} + 1}{3(q+1)} \right]^{\frac{1}{q}} (b-a)^{1+\frac{1}{q}} \|f'\|_p.$$

**Demostración:**

Dado que, por hipótesis,  $f$  es continua en  $[a, b]$ , diferenciable en  $(a, b)$  y  $f' \in L_p[a, b]$ , entonces  $f$  satisface las condiciones del corolario anterior y como  $P$  es una partición equidistante, se tiene que:

$$\begin{aligned}
|R_S(f, P_n)| & \leq \frac{1}{6} \left[ \frac{2^{q+1} + 1}{3(q+1)} \right]^{\frac{1}{q}} \left( \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^{q+1} \right)^{\frac{1}{q}} \|f'\|_p \\
& = \frac{1}{6} \left[ \frac{2^{q+1} + 1}{3(q+1)} \right]^{\frac{1}{q}} \left( \sum_{i=0}^{n-1} \left( \frac{b-a}{n} \right)^{q+1} \right)^{\frac{1}{q}} \|f'\|_p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{6} \left[ \frac{2^{q+1} + 1}{3(q+1)} \right]^{\frac{1}{q}} \left( \frac{(b-a)^{q+1}}{n^q} \right)^{\frac{1}{q}} \|f'\|_p \\
&= \frac{1}{6n} \left[ \frac{2^{q+1} + 1}{3(q+1)} \right]^{\frac{1}{q}} (b-a)^{1+\frac{1}{q}} \|f'\|_p.
\end{aligned}$$

■

**Observación:** La estimación anterior dada para la Fórmula de Simpson se satisface aun en el caso particular en el que  $f$  admite cuarta derivada y la misma está acotada en  $[a, b]$ . Esto es, el resultado anterior es una generalización de la conocida desigualdad de Simpson. Como ejemplo puede considerarse la función  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = x^r$$

donde  $r \in (3, 4)$ . Note que  $f$  admite derivadas continuas hasta el tercer orden en  $(0, 1)$ .  $f$  admite cuarta derivada en  $(0, 1)$ , la cual viene dada por:

$$f^{(IV)}(x) = \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{x^{4-s}}$$

Sin embargo, como se puede apreciar,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f^{(IV)}(x) = \infty$  por lo que  $f$  no esta acotada en  $(0, 1)$ . En cambio,  $f'$  es acotada en  $(0, 1)$ , por lo que  $f' \in L^p[0, 1]$  y además

$$\begin{aligned}
\|f'\|_p &= \left( \int_0^1 |rx^{r-1}|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left( \int_0^1 r^p x^{(r-1)p} dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{r}{((r-1)p+1)^{\frac{1}{p}}}.
\end{aligned}$$

es decir,  $\|f'\|_p = \frac{r}{((r-1)p+1)^{\frac{1}{p}}}$ . Además, el resto para la Fórmula de Simpson de acuerdo al corolario 2 y empleando la partición equidistante  $P = \{0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$  satisface lo siguiente:

$$\begin{aligned}
|R_S(f, P)| &\leq \frac{1}{6n} \left[ \frac{2^{q+1} + 1}{3(q+1)} \right]^{\frac{1}{q}} \frac{r}{(p(r-1)+1)^{\frac{1}{p}}} \\
&= \frac{1}{6n} \left[ \frac{2^{\frac{2p-1}{p-1}} + 1}{3(\frac{2p-1}{p-1})} \right]^{\frac{p-1}{p}} \frac{r}{(p(r-1)+1)^{\frac{1}{p}}}
\end{aligned}$$

## 1.2 Aplicaciones

En esta sección se definirán algunas medias usadas en muchas aplicaciones, así como la aplicabilidad de los resultados previos a fin de proporcionar algunas desigualdades que envuelvan a las mismas. A continuación se introducirá la definición de media, salvo que se especifique lo contrario, en lo sucesivo se considerarán  $a, b \in \mathbb{R}$ .

**Definición 1.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^n$ . **Una media de  $n$  variables** es una función  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  que satisface la siguiente propiedad: Para  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in S$ , se tiene:

$$\min\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \leq f(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}.$$

A continuación, se darán ejemplos de algunas medias muy conocidas por su aplicación en otras ciencias

1. **La media aritmética** de  $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$  es el número  $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$  definido por:

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n}$$

esto es, la media aritmética de una muestra  $x_1, x_2, \dots, x_n$  es la suma de los datos de la muestra dividida entre la cantidad de datos que posee la misma. Esta media tiene aplicaciones en varias ramas, especialmente en las Matemáticas Financieras y la Estadística.

La media aritmética posee varias propiedades: Si  $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,  $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  son vectores en  $\mathbb{R}^n$ ,  $\lambda > 0$  y  $\sigma$  es una permutación de los valores  $1, 2, \dots, n$ , entonces:

- $A(a_1, a_2, \dots, a_n) = A(a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, \dots, a_{\sigma(n)})$ .
- $A(\lambda \vec{a}) = \lambda A(\vec{a})$ .
- $A(\vec{a} + \vec{b}) = A(\vec{a}) + A(\vec{b})$ .

- $\min_{1 \leq k \leq n} a_k \leq A(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq \max_{1 \leq k \leq n} a_k$ . Además, la igualdad es válida, si, y solo si, para todo  $j = 1, 2, \dots, n$ ,  $a_j = c$ , con  $c \in \mathbb{R}$ .
- Si  $m, n \in \mathbb{R}$ , con  $n > m$ , y  $a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ , entonces para  $A = A(a_1, a_2, \dots, a_m)$ , se tiene que  $A = \overline{A}(\overbrace{A, A, \dots, A}^{\text{m veces}}, a_{m+1}, \dots, a_n)$  donde  $\overline{A}$  denota la media aritmética de los valores  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .
- $A(a_1 - A, a_2 - A, \dots, a_n - A) = 0$ , esto es, la suma de las desviaciones respecto a la media siempre es igual a cero (por ende, no es posible proporcionar una dispersión de los valores respecto a esta media por medio de esta suma)

2. **La media geométrica** de  $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$  es el número  $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$  definido por:

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k}.$$

Algunas propiedades de la media geométrica son las siguientes:

- El logaritmo natural de la media geométrica de  $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  es la media aritmética de los logaritmos correspondientes de los datos  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

Esto es

$$\ln \left( \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k} \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(a_k).$$

- La media aritmética se puede aproximar por la media geométrica mediante la siguiente sucesión (Ver [50]):

$$x_0 = a, x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n} \quad (n \geq 1)$$

esta sucesión fue ampliamente utilizada por los babilonios, converge a  $\sqrt{ab}$  y provee un algoritmo útil, para el cálculo, mediante los ordenadores actuales, de

la raíz cuadrada de un número. Ya que su razón de convergencia es cuadrática, esta expresión se puede generalizar a dos dimensiones como sigue

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \quad , \quad y_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{x_n} + \frac{1}{y_n}} \quad \text{para } n = 0, 1, \dots$$

donde  $y_n = \frac{a}{x_n}$  converge  $\sqrt{a} = \sqrt{x_0 y_0}$ . De esta manera, la media geométrica puede ser aproximada mediante un algoritmo iterativo por las medias aritmética y armónica (la cual se definirá a continuación). Este método es actualmente conocido como el Método de Herón (Ver [51, 52]).

- La media geométrica de  $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  es menor o igual que la media aritmética correspondiente.
- La media geométrica de  $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  donde cada componente es positiva, está comprendida entre el mínimo y el máximo de las componentes del vector  $\vec{a}$ , es decir:

$$\min_{1 \leq k \leq n} \{a_k\} \leq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k} \leq \max_{1 \leq k \leq n} \{a_k\}.$$

3. Sean  $a_1, a_2, \dots, a_n$  números reales positivos no nulos. **La media armónica** de un vector  $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in (0, \infty)^n$  viene dada por la siguiente expresión

$$H(\vec{a}) = \frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}}.$$

La media armónica posee aplicaciones en la transmisión de sistemas con redes, para mayor información sobre esto, se remite al lector a [56]. También, la media armónica desempeña un importante papel en las ciencias de la Computación, la Electrónica, Hidrología, Genética de poblaciones, entre otras.

Algunas propiedades de esta media vienen dadas por:

- La inversa de la media armónica de un vector  $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  es igual a la media aritmética de las inversas de cada una de las componentes del vector  $\vec{a}$ . Esto es:

$$H^{-1}(\vec{a}) = A(a_1^{-1}, a_2^{-1}, \dots, a_n^{-1}).$$

- Se tiene la siguiente relación

$$H(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot A(b_1, b_2, \dots, b_n) = G^n(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

donde, para  $j = 1, 2, \dots, n$ ,  $b_j = \frac{\prod_{k=1, k \neq j}^n a_k}{n}$ . En particular, para  $n = 2$ , se tiene que

$$H(a_1, a_2) \cdot A(a_1, a_2) = G^2(a_1, a_2).$$

- Para cualesquiera números reales positivos no nulos  $x, y$ , se satisface lo siguiente:

$$\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$

Es decir, la media aritmética y armónica son, respectivamente, cotas superiores e inferiores de la media geométrica.

- Empleando el método de Herón descrito previamente, se tiene que, para números reales positivos  $x, y$ , se tiene lo siguiente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H(x_n, y_n) = G(x, y).$$

donde  $x_n, y_n$  están definidas por 1.9

A continuación, considerando  $0 < a < b$ , se definen las siguientes medias:

1. **La media logarítmica** de  $a$  y  $b$  es el número  $L(a, b)$  definido por:

$$L(a, b) = \frac{a - b}{\ln(a) - \ln(b)}.$$

La media logarítmica posee aplicaciones en el cálculo de una temperatura media entre dos puntos con temperaturas distintas en un proceso de transferencia de fluidos, así como en otras ramas tales como la Economía, la Física y la Meteorología (Ver [53]). Entre las propiedades de la media logarítmica podemos enunciar:

- $L$  es una función simétrica, es decir:

$$L(a, b) = L(b, a).$$



- $L$  es homogénea de grado 1, es decir si  $\lambda > 0$ , entonces:

$$L(\lambda a, \lambda b) = \lambda L(a, b).$$

- $L$  posee una fórmula integral, la cual viene dada por:

$$L(a, b) = \int_0^1 a^t b^{1-t} dt.$$

- La media logarítmica separa la media aritmética y geométrica. Esto es,

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a-b}{\ln(a) - \ln(b)} \leq \frac{a+b}{2}$$

para todo  $a, b \in \mathbb{R}$ , con  $0 < a < b$ .

- Se tiene la siguiente identidad

$$\frac{L(a^2, b^2)}{L(a, b)} = A(a, b)$$

Para una generalización de la media logarítmica en  $n$  variables e identidades relacionadas a esta media, véase [54].

2. **La media idéntrica** de  $a, b \in \mathbb{R}$  es el número  $I(a, b)$  definido por:

$$I(a, b) = \frac{1}{e} \left( \frac{b^b}{a^a} \right)^{\frac{1}{b-a}}$$

Entre las propiedades de la media idéntrica se pueden listar:

- Para  $a, b \in \mathbb{R}$ , con  $a, b > 0$ , se tiene que

$$I(a, b) = I(b, a).$$

- Se satisface la siguiente identidad (Ver [58] y [59])

$$I(e^t, e^{-t}) = e^{\frac{t}{\tanh(t)}}^{-1}.$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

- El logaritmo natural de la media idéntica de  $a$  y  $b$ ,  $a < b$  es el cociente incremental de la función  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g(x) = x \ln(x) - x$ , esto es:

$$\ln(I(a, b)) = \frac{a \ln(a) - b \ln(b)}{a - b} - 1$$

con esto,  $I(a, b)$  se puede expresar de la forma integral como sigue:

$$I(a, b) = \exp \left( \int_0^1 \ln(bt + (1 - t)a) dt \right).$$

- (Ver [59]) La media idéntica se relaciona con las medias aritmética y geométrica como sigue

$$I^2(a, b) = \exp \left( \int_0^1 \ln((1 - u^2)A^2(a, b) + u^2(G^2(a, b))) du \right).$$

- Se satisface la siguiente desigualdad: Para  $a \neq b$ , entonces

$$L > \sqrt{IG}.$$

- (Ver [60]) Se cumple la siguiente desigualdad:

$$L(a, b) \leq I(a, b) \leq A(a, b)$$

siendo  $A, L$  las medias aritmética y logarítmica, respectivamente.

Para mayor información sobre medias logarítmica e idéntica, véase las referencias [58–62].

3. **La media  $p$ -logarítmica** de números reales positivos  $a, b$  viene dada por la siguiente expresión:

$$L_p(a, b) = \left[ \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{(p+1)(b-a)} \right]^{\frac{1}{p}} \quad p \neq -1, 0$$

esta familia de medias constituye un caso especial de las medias de Stolarsky (Ver [55]) y poseen aplicaciones en múltiples ramas tales como la Biología, las Matemáticas Financieras, las Ciencias Políticas, la Estadística, etc. Algunas propiedades de estas medias son:

- La media  $p$ -logarítmica es monótona creciente en  $p$ , esto es, para  $p, q \in \mathbb{R} - \{-1, 0\}$ , con  $p < q$ , se tiene que

$$S_p(a, b) \leq S_q(a, b).$$

- $\lim_{p \rightarrow 0} S_p(a, b) = I(a, b).$
- $\lim_{p \rightarrow -1} S_p(a, b) = L(a, b).$
- $\lim_{p \rightarrow 1} S_p(a, b) = A(a, b).$
- $S_{-2}(a, b) = G(a, b)$
- $\lim_{p \rightarrow \infty} S_p(a, b) = \max\{a, b\}.$
- $\lim_{p \rightarrow -\infty} S_p(a, b) = \min\{a, b\}.$

La media  $p$ -logarítmica (y con ella, las medias idéntica, logarítmica por las segunda y tercera propiedades enunciadas previamente), se pueden generalizar a  $n$  variables mediante el Teorema del Valor Medio para diferencias divididas (véase [64] para mayor información) para la función potencia  $f(x) = x^p$ ,  $p \neq 0, -1$ , mediante la siguiente expresión: Para  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , se define:

$$L_p(x_0, x_1, \dots, x_n) = \left( n! \sum_{k=0}^n \frac{(x_k)^p}{\prod_{j=0, j \neq k} (x_k - x_j)} \right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

En lo que sigue, se aplicará el Teorema (4) a fin de proporcionar algunas desigualdades para las medias introducidas anteriormente. Nuevamente, se considerarán  $a, b$  números reales positivos con  $a < b$ .

1. Sea  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ , con  $f(x) = x^s$ ,  $s \in \mathbb{R}$ ,  $s \neq 0, 1$ . Entonces:

$$\begin{aligned}
\text{a) } \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx &= \frac{1}{b-a} \int_a^b x^s dx \\
&= \frac{1}{b-a} \left[ \frac{b^{s+1} - a^{s+1}}{s+1} \right] \\
&= (S_s(a, b))^s.
\end{aligned}$$

$$\text{b) } f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \left(\frac{a+b}{2}\right)^s = (A(a, b))^s.$$

$$\text{c) } \frac{f(a) + f(b)}{2} = \frac{a^s + b^s}{2} = A(a^s, b^s).$$

Luego, en virtud del Teorema (4), se cumple que:

$$\begin{aligned}
\left| (S_s(a, b))^s - \frac{1}{3} [A(a^s, b^s) + 2(A(a, b))^s] \right| &\leq \frac{1}{6} \left[ \frac{2^{q+1} + 1}{3(q+1)} \right]^{\frac{1}{q}} (b-a)^{\frac{1}{q}} \|sx^{s-1}\|_p \\
&= \frac{1}{6} \left[ \frac{2^{q+1} + 1}{3(q+1)} \right]^{\frac{1}{q}} (b-a)^{\frac{1}{q}} |s| \|x^{s-1}\|_p.
\end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
\|x^{s-1}\|_p &= \left( \frac{1}{b-a} \int_a^b |x^{s-1}|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left( \frac{1}{b-a} \int_a^b x^{p(s-1)} dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left( \frac{1}{b-a} \left[ \frac{b^{p(s-1)+1} - a^{p(s-1)+1}}{(p(s-1)+1)(b-a)} \right] \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left[ \left( \frac{1}{b-a} \left[ \frac{b^{p(s-1)+1} - a^{p(s-1)+1}}{(p(s-1)+1)(b-a)} \right] \right)^{\frac{1}{p(s-1)}} \right]^{s-1} \\
&= (S_{p(s-1)}(a, b))^{s-1}.
\end{aligned}$$

luego,

$$\left| (S_s(a, b))^s - \frac{1}{3} [A(a^s, b^s) + 2(A(a, b))^s] \right| \quad (1.9)$$

$$\leq \frac{1}{6} \left[ \frac{2^{q+1} + 1}{3(q+1)} \right]^{\frac{1}{q}} (b-a)^{\frac{1}{q}} |s| (S_{p(s-1)}(a, b))^{s-1}. \quad (1.10)$$

2. Sea  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  ( $0 < a < b$ ),  $f(x) = \frac{1}{x}$ , entonces:

$$\text{a) } \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{1}{x} dx = \frac{\ln(b) - \ln(a)}{b-a} = (L(a, b))^{-1}.$$

$$\text{b) } f\left(\frac{a+b}{2}\right) = (A(a, b))^{-1}.$$

$$\text{c) } \frac{f(a) + f(b)}{2} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2} = (H(a, b))^{-1}.$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \|f'\|_p &= \left\| -\frac{1}{x^2} \right\|_p \\ &= \left( \int_a^b x^{-2p} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left( \frac{b^{-2p+1} - a^{-2p+1}}{-2p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= (b-a)^{\frac{1}{p}} \left[ \left( \frac{b^{-2p+1} - a^{-2p+1}}{(-2p+1)(b-a)} \right)^{\frac{1}{-2p}} \right]^{-2} \\ &= (b-a)^{\frac{1}{p}} (S_{-2p}(a, b))^{-2}. \end{aligned} \quad \text{Así, por el Teorema (4)}$$

$$\left| L^{-1}(a, b) - \frac{1}{3} [H^{-1}(a, b) + 2A^{-1}(a, b)] \right| \leq \frac{1}{6} \left[ \frac{2^{q+1} + 1}{3(q+1)} \right]^{\frac{1}{q}} (b-a)(S_{-2p}(a, b))^{-2}.$$

Multiplicando ambos miembros por  $(3AHL)(a, b)$ , se tiene

$$|3(AH)(a, b) - (AL)(a, b) + 2(HL)(a, b)| \leq \frac{(AHL)(a, b)}{2} \left[ \frac{2^{q+1} + 1}{3(q+1)} \right]^{\frac{1}{q}} (b-a)(S_{-2p}(a, b))^{-2}.$$

3. Sea  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  ( $0 < a < b$ ), dada por  $f(x) = \ln(x)$ , así

$$\begin{aligned}
\text{a)} \quad \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx &= \frac{1}{b-a} \int_a^b \ln(x) \\
&= \frac{b(\ln(b) - 1) - a(\ln(a) - 1)}{b-a} \\
&= \frac{b\ln(b) - a\ln(a)}{b-a} - 1 \\
&= \frac{\ln(b^b) - \ln(a^a)}{b-a} + \ln\left(\frac{1}{e}\right) \\
&= \ln\left(\frac{1}{e} \left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}}\right) \\
&= \ln(I(a, b)).
\end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) = \ln(A(a, b)).$$

$$\begin{aligned}
\text{c)} \quad \frac{f(a) + f(b)}{2} &= \frac{\ln(a) + \ln(b)}{2} \\
&= \ln(\sqrt{ab}) \\
&= \ln(G(a, b)).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{d)} \quad \|f'\|_p &= \left\| \frac{1}{x} \right\|_p = \left( \int_a^b \frac{1}{x^p} dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left( \frac{b^{1-p} - a^{1-p}}{1-p} \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= (b-a)^{\frac{1}{p}} \left[ \left( \frac{b^{1-p} - a^{1-p}}{(b-a)(1-p)} \right) \right]^{-1} \\
&= (b-a)^{\frac{1}{p}} (S_{-p}(a, b))^{-1}.
\end{aligned}$$

Por ende, aplicando el Teorema (4) y utilizando las propiedades del logaritmo, se tiene que

$$\left| \ln\left(\frac{I}{G^{\frac{1}{3}}} A^{\frac{2}{3}}\right) \right| \leq \frac{b-a}{6} \left[ \frac{2^{q+1} + 1}{3(q+1)} \right]^{\frac{1}{q}} (S_{-p}(a, b))^{-1}.$$

Para más información sobre resultados, generalizaciones y aplicaciones sobre medias,

véase . [28], [60–63], [73–76, 78, 79].

### 1.3 Generalizaciones

En esta sección se expondrán algunos resultados que generalizan la desigualdad de Simpson ordinaria. Sin embargo es importante enunciar algunos conceptos preliminares sobre funciones que son de interés. La teoria expuesta a continuación puede verse en

**Definición 2.** Sea  $z \in \mathbb{C}$ , con  $\Re(z) > 0$  y sea  $A$  el conjunto  $A = \{w \in \mathbb{C} : \Re(w) > 0\}$ . Se define **la función Gamma**  $\Gamma : A \longrightarrow \mathbb{C}$  por la siguiente expresión

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

El siguiente resultado recoge algunas propiedades de la función Gamma. Para mayor información al respecto, véase

**Proposición 1.** Sea  $z \in \mathbb{C}$ , con  $\Re(z) > 0$ . Así, se tiene:

- a)  $\Gamma(1) = 1$ .
- b)  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ .
- c) Si  $z \in \mathbb{N}$ , entonces  $\Gamma(z+1) = z!$ . Esto es,  $\Gamma$  es una extensión de la función factorial.
- d) La función  $\Gamma$  no se anula en su dominio.
- e)  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ .
- f) (Fórmula de duplicación de Legendre) Se satisface lo siguiente

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2z} \sqrt{\pi} \Gamma(2z)$$

- g) (Fórmula de reflexión) Para  $z \in \mathbb{C}$ , se tiene lo siguiente

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

**Observación 1.** *Se puede demostrar, por el Criterio M de Weiertrass, que la integral dada en 2 es absolutamente convergente, de modo que  $\Gamma$  es una función bien definida en  $A$ .*

**Observación 2.** *Mediante prolongación analítica, se puede extender la función  $\Gamma$  al conjunto  $\mathbb{C} - \mathbb{Z}^-$*

**Definición 3.** *Sean  $z, w \in \mathbb{C}$ , con  $\Re(z), \Re(w) > 0$ . **La función Beta** es una función  $B : A \times A \longrightarrow \mathbb{C}$  definida por:*

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt.$$

Algunas propiedades básicas de la función Beta se pueden enunciar:

**Proposición 2.** *Sean  $z, w \in \mathbb{C}$ , con  $\Re(z), \Re(w) > 0$ , Luego*

a) *(Simetría)  $B(z, w) = B(w, z)$ .*

b) *Relación con la función Gamma  $B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$ .*

c) *Se satisface lo siguiente:*

$$B(z, w) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(\theta))^{2z-1} (\cos(\theta))^{2w-1} d\theta.$$

d)  $B(z, w) = B(z+1, w) + B(z, w+1)$ .

e)  $B(z+1, w) = B(z, w) \frac{z}{z+w}$ .

f)  $B(z, w) \cdot B(z+w, 1-w) = \frac{\pi}{z \sin(\pi w)}$ .

para más información, véase

A continuación, la siguiente teoría puede encontrarse en



**Definición 4.** Sea  $U = \{(a, b, c, z) \in \mathbb{C}^4 : c \neq 0, -1, -2, \dots, y |z| < 1\}$ . **La función hipergeométrica de Gauss de variable  $z$  y parámetros  $a, b, c$  es la función  $F : U \longrightarrow \mathbb{C}$  dada por**

$$F(a, b, c, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}$$

donde  $(a)_k$  se denomina **símbolo de Pochhammer** y está definido por

$$(a)_k = \prod_{i=0}^{k-1} (a + i) = \frac{\Gamma(a + k)}{\Gamma(a)}$$

Las función hipergeométrica de Gauss posee las siguientes propiedades:

**Proposición 3.** Sea  $(a, b, c, z) \in U$ , entonces se satisface lo siguiente:

- a)  $F(a, b, c, z) = F(b, a, c, z)$ .
- b)  $cF(a, b - 1, c, z) + (a - b)F(a, b, c + 1, z) = cF(a - 1, b, c, z)$ .
- c)  $F(a, b, c, z) = (1 - z)^{-a} F(a, c - b, c, \frac{z}{z-1})$ .
- d)  $F(a, b, c, z) = (1 - z)^{-b} F(b, c - a, c, \frac{z}{z-1})$ .
- e)  $F(a, b, c, z) = (1 - z)^{c-a-b} F(c - a, c - b, c, z)$ .
- f) Para  $a, b, c, z \in \mathbb{C}$  tales que  $\Re(c) > \Re(b) > 0, |z| < 1$  y  $|\arg(1 - z)| < \pi$ , se obtiene lo siguiente:

$$F(a, b, c, z) = \frac{1}{B(b, c - b)} \int_0^1 t^{b-1} (1 - t)^{c-b-1} (1 - zt)^{-a} dt \quad (1.11)$$

Donde  $B$  es la función Beta.

Para más información sobre identidades y generalizaciones sobre funciones hipergeométricas, vease

Con estos fundamentos, se puede enunciar el siguiente teorema, el cual puede verse en

**Teorema 5.** Sea  $n \in \{3, 2, 4\}$ ,  $p, q \in [1, \infty]$  números reales conjugados.  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función que admite derivadas hasta orden  $n$ ,  $n \leq 4$ , tal que  $f^{(n-1)} \in AC[a, b]$  y  $f^n \in L^p[a, b]$ . Entonces se satisface la siguiente desigualdad:

$$|\Re_S(f, [a, b])| \leq K(n, p)(b-a)^{n+\frac{1}{q}} \|f^{(n)}\|_p$$

donde

i) Si  $1 < p < \infty$ , entonces

$$K(n, p) = \begin{cases} \frac{1}{36 \cdot 3^{\frac{1}{q}}} \left( 2^{q+1} B(q+1, q+1) \frac{1}{q+1} F(-q, q+1, q+2, -\frac{1}{2}) \right)^{\frac{1}{q}} & \text{si } n=2. \\ \frac{1}{48} B(2q+1, q+1)^{\frac{1}{q}} & \text{si } n=3. \\ \frac{1}{288} \left( \frac{1}{3q+1} F(-q, 3q+1, 3q+2, \frac{3}{4}) \right)^{\frac{1}{q}} & \text{si } n=4. \end{cases}$$

ii) Si  $p = 1$ , entonces

$$K(n, 1) = \begin{cases} \frac{1}{24} & \text{si } n=2. \\ \frac{1}{324} & \text{si } n=3. \\ \frac{1}{1152} & \text{si } n=4. \end{cases}$$

iii) Si  $p = \infty$  entonces

$$K(n, \infty) = \begin{cases} \frac{1}{81} & \text{si } n=2. \\ \frac{1}{576} & \text{si } n=3. \\ \frac{1}{2880} & \text{si } n=4. \end{cases}$$

### Demostración:

Se realizará esta demostración subdividiéndola en casos según  $n$ .

1. Si  $n = 2$ , consideremos la función  $s_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$s_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-a) \left(x - \frac{2a+b}{3}\right) & \text{si } a \leq x < \frac{a+b}{2}. \\ \frac{1}{2}(x-b) \left(x - \frac{2b+a}{3}\right) & \text{si } \frac{a+b}{2} \leq x < b. \end{cases}$$

Nótese que, aplicando la Desigualdad de Hölder, la identidad 1.2 y la Desigualdad triangular para integrales, se obtiene:

$$\begin{aligned} |\Re(f, [a, b])| &= \left| \int_a^b s_2(x) f''(x) dx \right| \\ &= \int_a^b |s_2(x)| |f''(x)| dx \\ &\leq \|s_2\|_q \|f''\|_p. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Consideremos tres subcasos:

**1a** Si  $1 < p < \infty$ , entonces  $1 < q < \infty$  y así

$$\begin{aligned} \|s_2\|_q^q &= \int_a^b |s_2|^q dx \\ &= \int_a^{\frac{2a+b}{3}} \left( \frac{1}{2}(x-a) \left( \frac{2a+b}{3} - x \right) \right)^q f''(x) dx \\ &\quad + \int_{\frac{2a+b}{3}}^{\frac{a+b}{2}} \left( \frac{1}{2}(x-a) \left( x - \frac{2a+b}{3} \right) \right)^q f''(x) dx \\ &\quad + \int_{\frac{a+b}{2}}^{\frac{2b+a}{3}} \left( \frac{1}{2}(b-x) \left( \frac{2b+a}{3} - x \right) \right)^q f''(x) dx \\ &\quad + \int_{\frac{2b+a}{3}}^b \left( \frac{1}{2}(b-x) \left( x - \frac{2b+a}{3} \right) \right)^q f''(x) dx \end{aligned}$$

Realizando los cambios de variables  $x = \frac{b-a}{3}t + a$ ,  $x = \frac{b-a}{6}t + \frac{2a+b}{3}$ ,  $\frac{2b+a}{3} - \frac{b-a}{6}t$  y  $\frac{b-a}{3}t + \frac{2b+a}{3}$ , respectivamente, en la primera, segunda, tercera y cuarta integral,

se obtiene:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2^q} \left( \frac{b-a}{3} \right)^{2q+1} \int_0^1 t^q (1-t)^q dt + \frac{1}{2^q} \left( \frac{b-a}{6} \right)^{2q+1} \int_0^1 (t+2)^q t^q dt \\
& - \frac{1}{2^q} \left( \frac{b-a}{6} \right)^{2q+1} \int_1^0 (t+2)^q t^q dt + \frac{1}{2^q} \left( \frac{b-a}{3} \right)^{2q+1} \int_0^1 (1-t)^q t^q dt \\
& = \frac{1}{2^q} \left[ 2 \left( \frac{b-a}{3} \right)^{2q+1} \int_0^1 t^q (1-t)^q dt + 2 \left( \frac{b-a}{6} \right)^{2q+1} \int_0^1 t^q (2+t)^q dt \right] \\
& = \frac{2}{2^q} \left[ \left( \frac{b-a}{3} \right)^{2q+1} B(q+1, q+1) + 2^q \left( \frac{b-a}{6} \right)^{2q+1} \frac{q+1}{q+1} \int_0^1 t^q \left( 1 + \frac{t}{2} \right)^q dt \right] \\
& = \frac{2}{2^q} \left[ \left( \frac{b-a}{3} \right)^{2q+1} B(q+1, q+1) + \frac{2^q}{q+1} \left( \frac{b-a}{6} \right)^{2q+1} F(-q, q+1, q+2, -\frac{1}{2}) \right] \\
& = \frac{2}{2^q} \left( \frac{b-a}{6} \right)^{2q+1} \left[ 2^{2q+1} B(q+1, q+1) + \frac{2^q}{q+1} F(-q, q+1, q+2, -\frac{1}{2}) \right] \\
& = (b-a)^{2q+1} \frac{2}{6 \cdot 6^{2q}} \left[ 2^{q+1} B(q+1, q+1) + \frac{1}{q+1} F(-q, q+1, q+2, -\frac{1}{2}) \right] \\
& = (b-a)^{2q+1} \frac{1}{3 \cdot 36^q} \left[ 2^{q+1} B(q+1, q+1) + \frac{1}{q+1} F(-q, q+1, q+2, -\frac{1}{2}) \right].
\end{aligned}$$

En resumen

$$\int_a^b |s_2(x)|^q dx = K(2, p)^q (b-a)^{2q+1}.$$

Sustituyendo en la desigualdad 1.12, se obtiene:

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{R}_S(f, [a, b])| & \leq \|s_2\|_q \|f''\|_p \\
& = \left( \int_a^b |s_2(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \|f''\|_p \\
& = K(2, p) (b-a)^{2+\frac{1}{q}} \|f''\|_p.
\end{aligned}$$

**1b** Si  $p = \infty$ ,  $q = 1$ . De esta manera, se tiene que:

$$\|s_2\|_1 = \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left| \frac{1}{2}(x-a) \left( x - \frac{2a+b}{3} \right) \right| dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left| \frac{1}{2}(x-b) \left( x - \frac{2b+a}{3} \right) \right| dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left[ \int_a^{\frac{2a+b}{3}} (x-a) \left( \frac{2a+b}{3} - x \right) dx + \int_{\frac{2a+b}{3}}^{\frac{a+b}{2}} (x-a) \left( x - \frac{2a+b}{3} \right) dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{\frac{a+b}{2}}^{\frac{2b+a}{3}} (b-x) \left( \frac{2b+a}{3} - x \right) dx + \int_{\frac{2b+a}{3}}^b \frac{1}{2} (b-x) \left( x - \frac{2b+a}{3} \right) dx \right] \\
&= \left[ -\frac{x^3}{6} + \frac{5a+b}{12}x^2 - \frac{2a^2+ab}{6}x \right] \Big|_a^{\frac{2a+b}{3}} + \left[ \frac{x^3}{6} - \frac{5a+b}{12}x^2 + \frac{2a^2+ab}{6}x \right] \Big|_{\frac{2a+b}{3}}^{\frac{a+b}{2}} \\
&\quad + \left[ \frac{x^3}{6} - \frac{5b+a}{12}x^2 + \frac{2b^2+ab}{6}x \right] \Big|_{\frac{a+b}{2}}^{\frac{2b+a}{3}} + \left[ -\frac{x^3}{6} + \frac{5b+a}{12}x^2 - \frac{2b^2+ab}{6}x \right] \Big|_{\frac{2b+a}{3}}^b. \\
&= \left[ -\frac{1}{6} \left( \frac{2a+b}{3} \right)^3 + \frac{5a+b}{12} \left( \frac{2a+b}{3} \right)^2 - \left( \frac{2a^2+ab}{6} \right) \left( \frac{2a+b}{3} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{a^3}{3} - \frac{5a+b}{12}a^2 + \left( \frac{2a^2+ab}{6} \right) a \right] \\
&\quad + \left[ \frac{1}{6} \left( \frac{a+b}{2} \right)^3 - \left( \frac{5a+b}{12} \right) \left( \frac{a+b}{2} \right)^2 + \left( \frac{2a^2+ab}{6} \right) \left( \frac{a+b}{2} \right) - \frac{1}{6} \left( \frac{2a+b}{3} \right)^3 \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{5a+b}{12} \right) \left( \frac{2a+b}{3} \right)^2 - \left( \frac{2a^2+ab}{6} \right) \left( \frac{2a+b}{3} \right) \right] \\
&\quad + \left[ \frac{1}{6} \left( \frac{2b+a}{3} \right)^3 - \frac{5b+a}{12} \left( \frac{2b+a}{3} \right)^2 + \left( \frac{2b^2+ab}{6} \right) \left( \frac{2b+a}{3} \right) - \frac{1}{6} \left( \frac{a+b}{2} \right)^3 \right. \\
&\quad \left. + \frac{5b+a}{12} \left( \frac{a+b}{2} \right)^2 - \left( \frac{2b^2+ab}{6} \right) \left( \frac{a+b}{2} \right) \right] \\
&\quad + \left[ -\frac{b^3}{6} + \left( \frac{5b+a}{12} \right) b^2 - \left( \frac{2b^2+ab}{6} \right) b + \frac{1}{6} \left( \frac{2b+a}{3} \right)^3 - \left( \frac{5b+a}{12} \right) \left( \frac{2b+a}{3} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{2b^2+ab}{6} \right) \left( \frac{2b+a}{3} \right) \right] \\
&= \left[ -\frac{8a^3+12a^2b+6ab^2+b^3}{162} + \frac{20a^3+24a^2b+9ab^2+b^3}{108} - \frac{4a^3+4a^2b+ab^2}{18} \right. \\
&\quad \left. + \frac{a^3+a^2b}{12} \right] \\
&\quad + \left[ -\frac{5a^3+11a^2b+7ab^2+b^3}{48} + \frac{2a^3+3a^2b+ab^2}{12} - \frac{8a^3+12a^2b+6ab^2+b^3}{162} \right. \\
&\quad \left. + \left[ \frac{8b^3+12b^2a+6ba^2+a^3}{162} - \frac{20b^3+24b^2a+9ba^2+a^3}{108} + \frac{4b^3+4b^2a+ba^2}{18} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{5b^3+11b^2a+7ba^2+a^3}{48} - \frac{2b^3+3b^2a+ba^2}{12} \right] \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ -\frac{b^3 + ab^2}{12} + \frac{8b^3 + 12b^2a + 6ba^2 + a^3}{162} - \frac{20b^3 + 24b^2a + 9ba^2 + a^3}{108} + \frac{4b^3 + 4b^2a + ba^2}{18} \right] \\
& = \frac{7b^3 + 6b^2a - 6a^2b - 7a^3}{81} + \frac{19a^3 + 15a^2b - 15ab^2 - 19b^3}{54} + \frac{4b^3 + 3b^2a - 3ba^2 - 4a^3}{9} \\
& + \frac{a^3 + ba^2 - b^2a - b^3}{6} \\
& = \frac{1}{324} [28b^3 + 24b^2a - 24a^2b - 28a^3 + 114a^3 + 90a^2b - 90ab^2 - 114b^3 + 114b^3 + 108b^2a \\
& - 108ba^2 - 144a^3 - 54b^3 - 54b^2a + 54a^2b + 54a^3] \\
& = \frac{-4a^3 + 12a^2b - 12ab^2 + 4b^3}{324} \\
& = \frac{-a^3 + 3a^2b - 3ab^2 + b^3}{81} \\
& = \frac{(b-a)^3}{81} \\
& = K(2, \infty)(b-a)^3.
\end{aligned}$$

En resumen:

$$\int_a^b |s_2(t)| dt = K(2, \infty)(b-a)^3.$$

Sustituyendo esta expresión en 1.12, se obtiene

$$|\mathfrak{R}_S(f, [a, b])| \leq K(2, \infty)(b-a)^3 \|f''\|_\infty \quad (1.13)$$

**1c** Si  $p = 1$ ,  $q = \infty$  y de esta manera:

$$\begin{aligned}
\|s_2\|_q & = \sup_{a \leq x \leq b} |s_2(x)| \\
& = \max \left\{ \sup_{a \leq x \leq \frac{2a+b}{3}} \left\{ \frac{1}{2}(x-a) \left( \frac{2a+b}{3} - x \right) \right\}, \sup_{\frac{2a+b}{3} \leq x \leq \frac{a+b}{2}} \left\{ \frac{1}{2}(x-a) \left( x - \frac{2a+b}{3} \right) \right\}, \right. \\
& \quad \left. \sup_{\frac{a+b}{2} \leq x \leq \frac{2b+a}{3}} \left\{ \frac{1}{2}(b-x) \left( \frac{2b+a}{3} - x \right) \right\}, \sup_{\frac{2b+a}{3} \leq x \leq b} \left\{ \frac{1}{2}(b-x) \left( x - \frac{2b+a}{3} \right) \right\} \right\} \\
& = \frac{(b-a)^2}{24} \\
& = K(2, 1)(b-a)^2.
\end{aligned}$$

Sustituyendo en (1.12), se tiene

$$|\mathfrak{R}_S(f, [a, b])| \leq K(2, 1)(b-a)^2 \|f''\|_1 \quad (1.14)$$

Por último, de (1.13), (1.13) y (1.14), se obtiene la desigualdad 5 para el caso  $n = 2$ .

2. Si  $n = 3$ , consideremos la función  $s_3 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$s_3(x) = \begin{cases} -\frac{1}{6}(x-a)^2 \left(x - \frac{a+b}{2}\right) & \text{si } a \leq x < \frac{a+b}{2}. \\ -\frac{1}{6}(x-b)^2 \left(x - \frac{a+b}{2}\right) & \text{si } \frac{a+b}{2} \leq x < b. \end{cases} \quad (1.15)$$

Nótese que, por 1.3 y la Desigualdad de Hölder, se tiene que

$$|(f)| = \left| \int_a^b s_3(x) f'''(x) dx \right| = \|s_3\|_q \|f'''\|_p.$$

donde  $p, q \in [1, \infty]$  son números conjugados, con la convención de que  $\frac{1}{0} = \infty$  y  $\frac{1}{\infty} = 0$ . Consideremos tres subcasos:

**2a** Si  $1 < p < \infty$ , entonces  $q \in (1, \infty)$  y así

$$\begin{aligned} \|s_3\|_q^q &= \int_a^b |s_3(t)|^q dt = \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(-\frac{1}{6}\right)^q (x-a)^{2q} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^q dx \\ &\quad + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(-\frac{1}{6}\right)^q (x-b)^{2q} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^q dx. \end{aligned}$$

Ahora bien, mediante el cambio de variables  $x = \left(\frac{b-a}{2}\right)t + a$  en la primera integral y simplificando, se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(-\frac{1}{6}\right)^q (x-a)^{2q} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^q dx &= \left(\frac{b-a}{2}\right)^{3q+1} \frac{1}{6^q} \int_0^1 t^{2q} (1-t)^q dt \\ &= \left(\frac{b-a}{2}\right)^{3q+1} \frac{1}{6^q} B(2q+1, q+1). \end{aligned}$$

De manera análoga, mediante el cambio de variables  $x = \left(\frac{b-a}{2}\right)t + b$  en la segunda integral y simplificando, se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(-\frac{1}{6}\right)^q (x-b)^{2q} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^q dx &= \left(\frac{b-a}{2}\right)^{3q+1} \frac{1}{6^q} \int_0^1 t^{2q} (1-t)^q dt \\ &= \left(\frac{b-a}{2}\right)^{3q+1} \frac{1}{6^q} B(2q+1, q+1). \end{aligned}$$

De esta manera

$$\begin{aligned}\int_a^b |s_3(x)|^q dx &= \left(\frac{b-a}{2}\right)^{3q+1} \frac{2}{6^q} B(2q+1, q+1) \\ &= \frac{(b-a)^{3q+1}}{2^{3q} \cdot 6^q} B(2q+1, q+1).\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}\|f'''\|_p \|s_3\|_q &= \|f'''\|_p \left(\int_a^b |s_3(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \frac{1}{48} (B(2q+1, q+1))^{\frac{1}{q}} (b-a)^{3+\frac{1}{q}} \|f'''\|_p \\ &= K(3, p) (b-a)^{3+\frac{1}{q}} \|f'''\|_p.\end{aligned}$$

La cual es la desigualdad (5) para el caso  $n = 3, p \in (1, \infty)$ .

**2b** Si  $p = \infty$ , entonces  $q = 1$  y así

$$\begin{aligned}\|s_3\|_1 &= \int_a^b |s_3(x)| dx \\ &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} -\frac{1}{6}(x-a)^2 \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \frac{1}{6}(x-b)^2 \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx \\ &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} -\frac{1}{6}(x^2 + 2ax + a^2) \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \frac{1}{6}(x^2 + 2bx + b^2) \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx \\ &= -\frac{1}{6} \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left[ x^3 - 2ax^2 + a^2x - \left(\frac{a+b}{2}\right)x^2 + ax(a+b) - a^2 \left(\frac{a+b}{2}\right) \right] dx \\ &\quad + \frac{1}{6} \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left[ x^3 - 2bx^2 + b^2x - \left(\frac{a+b}{2}\right)x^2 + bx(a+b) - b^2 \left(\frac{a+b}{2}\right) \right] dx \\ &\quad - \frac{1}{6} \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{2a}{3}x^3 + \frac{a^2x^2}{2} - \left(\frac{a+b}{6}\right)x^3 + a \left(\frac{a+b}{2}\right)x^2 - a^2 \left(\frac{a+b}{2}\right) \right] \Big|_a^{\frac{a+b}{2}}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{6} \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{2b}{3}x^3 + \frac{b^2x^2}{2} - \left( \frac{a+b}{6} \right) x^3 + b \left( \frac{a+b}{2} \right) x^2 - b^2 \left( \frac{a+b}{2} \right) x \right] \Big|_{\frac{a+b}{2}}^b \\
& = -\frac{1}{6} \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{a+b}{2} \right)^4 - \frac{2a}{3} \left( \frac{a+b}{2} \right)^3 + \frac{a^2}{2} \left( \frac{a+b}{2} \right)^2 - \left( \frac{a+b}{6} \right) \left( \frac{a+b}{2} \right)^3 \right. \\
& \quad \left. + a \left( \frac{a+b}{2} \right)^3 - a^2 \left( \frac{a+b}{2} \right)^2 - \frac{a^4}{4} + \frac{2a^4}{3} - \frac{a^4}{2} + \left( \frac{a+b}{6} \right) a^3 - a^3 \left( \frac{a+b}{2} \right) + a^3 \left( \frac{a+b}{2} \right) \right] \\
& + \frac{1}{6} \left[ \frac{b^4}{4} - \frac{2b^4}{3} + \frac{b^4}{2} - \left( \frac{a+b}{6} \right) b^3 + b^3 \left( \frac{a+b}{2} \right) - b^3 \left( \frac{a+b}{2} \right) - \frac{1}{4} \left( \frac{a+b}{2} \right)^4 \right. \\
& \quad \left. + \frac{2b}{3} \left( \frac{a+b}{2} \right)^3 - \frac{b^2}{2} \left( \frac{a+b}{2} \right)^2 + \left( \frac{a+b}{6} \right) \left( \frac{a+b}{2} \right)^3 - b \left( \frac{a+b}{2} \right)^3 + b^2 \left( \frac{a+b}{2} \right)^2 \right] \\
& = -\frac{1}{6} \left[ -\frac{1}{12} \left( \frac{a+b}{2} \right)^4 + \frac{a}{3} \left( \frac{a+b}{2} \right)^3 - \frac{a}{2} \left( \frac{a+b}{2} \right)^2 - \frac{1}{12} a^4 + a^3 \left( \frac{a+b}{6} \right) \right] \\
& + \frac{1}{6} \left[ \frac{1}{12} b^4 - \left( \frac{a+b}{6} \right) b^3 + \frac{1}{12} \left( \frac{a+b}{2} \right)^4 - \frac{b}{3} \left( \frac{a+b}{2} \right)^3 + \frac{b^2}{2} \left( \frac{a+b}{2} \right)^2 \right] \\
& = -\frac{1}{12} \left( \frac{a+b}{2} \right)^4 + \left( \frac{a^2+b^2}{12} \right) \left( \frac{a+b}{2} \right)^2 - \left( \frac{a^3+b^3}{36} \right) (a+b) + \frac{a^4+b^4}{72} \\
& = -\frac{1}{12} \left( \frac{a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4}{16} + \frac{a^4+2a^3b+2a^2b^2+2ab^3+b^4}{48} \right. \\
& \quad \left. - \frac{a^4+ba^3+b^3a+b^4}{36} + \frac{a^4+b^4}{72} \right) \\
& = \frac{1}{576} [(-3a^4 - 12a^3b - 18a^2b^2 - 12ab^3 - 3b^4) + (12a^4 + 24a^3b + 24a^2b^2 + 24ab^3 + 12b^4) \\
& \quad - 16a^4 - 16ba^3 - 16b^3a - 16b^4 + 8a^4 + 8b^4] \\
& = \frac{1}{576} (b^4 - 4ab^3 + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4) \\
& = \frac{(b-a)^4}{576} \\
& = K(3, \infty)(b-a)^{3+\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Combinando este resultado con ??, se obtiene 5 para el caso  $n = 3, p = \infty$ .

**2c** Si  $p = 1$ , entonces  $q = \infty$  y así

$$\begin{aligned}
 \|s_3\|_\infty &= \sup_{a \leq x \leq b} \{|s_3(x)|\} \\
 &= \max \left\{ \sup_{a \leq x \leq \frac{a+b}{2}} \{|s_3(x)|\}, \sup_{\frac{a+b}{2} \leq x \leq b} \{|s_3(x)|\} \right\} \\
 &= \frac{1}{6} \left\{ \sup_{a \leq x \leq b} \left\{ (x-a)^2 \left( \frac{a+b}{2} - x \right) \right\}, \sup_{\frac{a+b}{2} \leq x \leq b} \left\{ (x-b)^2 \left( x - \frac{a+b}{2} \right) \right\} \right\} \\
 &= \frac{1}{6} \frac{(b-a)^3}{54} \\
 &= \frac{(b-a)^3}{324} \\
 &= K(3,1)(b-a)^3.
 \end{aligned}$$

Sustituyendo en ??, se obtiene 5 para el caso  $n = 3, p = 1$ .

De esta manera, se tiene demostrado 5 para el caso  $n = 3$ .

3. Si  $n = 4$ , Consideremos la función  $s_4 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$s_4(x) = \begin{cases} \frac{1}{24}(x-a)^3 \left( x - \frac{a+2b}{3} \right) & \text{si } a \leq x < \frac{a+b}{2}. \\ \frac{1}{24}(x-b)^2 \left( x - \frac{2a+b}{3} \right) & \text{si } \frac{a+b}{2} \leq x < b. \end{cases}$$

Nótese que, mediante la identidad 1.4, la desigualdad ?? y la Desigualdad de Hölder, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 |(f)| &= \left| \int_a^b s_4(x) f^{(IV)}(x) dx \right| \\
 &\leq \int_a^b |s_4(x)| |f^{(IV)}(x)| dx \\
 &\leq \|s_4\|_q \|f^{IV}\|_p.
 \end{aligned} \tag{1.16}$$

donde  $p, q \in [1, \infty]$  son números conjugados. Consideremos tres subcasos.

**3a** Si  $1 < p < \infty$ , entonces  $1 < q < \infty$  y así:

$$\begin{aligned} \|s_4\|_q^q &= \int_a^b |s_4(x)|^q dx \\ &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{1}{24^q} (x-a)^{3q} \left( \frac{a+2b}{3} - x \right)^q dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \frac{1}{24^q} (b-x)^{3q} \left( x - \frac{2a+b}{3} \right)^q dx \end{aligned}$$

Para la primera integral, se tiene, mediante el cambio de variable  $x = a + \left(\frac{b-a}{2}\right)t$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{24^q} \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)^{3q} \left( \frac{a+2b}{3} - x \right)^q dx &= \frac{1}{24^q} \int_0^1 \left( \frac{b-a}{2} \right)^{4q+1} \left( \frac{4}{3} - t \right)^q t^{3q} dt \\ &= \frac{1}{24^q} \int_0^1 \left( \frac{b-a}{2} \right)^{4q+1} \left( \frac{4}{3} \right)^q \left( 1 - \frac{3}{4}t \right)^q t^{3q} dt \\ &= \frac{(b-a)^{4q+1}}{2 \cdot 288^q (3q+1)} \int_0^1 \left( 1 - \frac{3}{4}t \right)^q t^{3q} dt \\ &= \frac{(b-a)^{4q+1}}{2 \cdot 288^q (3q+1)} F(-q, 3q+1, 3q+2, \frac{3}{4}). \end{aligned}$$

De forma análoga, mediante el cambio de variable  $x = b - \frac{b-a}{2}t$  en la segunda integral, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{24^q} \int_a^{\frac{a+b}{2}} (b-x)^{3q} \left( x - \frac{2a+b}{3} \right)^q dx &= \frac{1}{24^q} \int_0^1 \left( \frac{b-a}{2} \right)^{4q+1} t^{3q} \left( \frac{4}{3} - t \right)^q dt \\ &= \frac{(b-a)^{4q+1}}{288^q \cdot 2} \int_0^1 t^{3q} \left( 1 - \frac{3}{4}t \right)^q dt \\ &= \frac{(b-a)^{4q+1} (3q+1)}{2 \cdot 288^q (3q+1)} \int_0^1 t^{3q} \left( 1 - \frac{3}{4}t \right)^q dt \\ &= \frac{(b-a)^{4q+1}}{2 \cdot 288^q (3q+1)} F(-q, 3q+1, 3q+2, \frac{3}{4}) \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
 \|s_4\|_q^q &= \int_a^b |s_4(x)|^q dx \\
 &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} |s_4(x)|^q dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |s_4(x)|^q dx \\
 &= \frac{(b-a)^{4q+1}}{288^q(3q+1)} F(-q, 3q+1, 3q+2, \frac{3}{4}).
 \end{aligned}$$

de donde

$$\|s_4\|_q = \frac{(b-a)^{4+\frac{1}{q}}}{288} \left( \frac{1}{3q+1} F(-q, 3q+1, 3q+2, \frac{3}{4}) \right)^{\frac{1}{q}}$$

Finalmente, sustituyendo esta expresión en ??, se obtiene

$$\begin{aligned}
 |\Re(f, [a, b])| &\leq \|s_4\|_q \|f^{IV}\|_p \\
 &= \frac{(b-a)^{4+\frac{1}{q}}}{288} \left( \frac{1}{3q+1} F(-q, 3q+1, 3q+2, \frac{3}{4}) \right)^{\frac{1}{q}} \\
 &= K(4, p)(b-a)^{4+\frac{1}{q}}.
 \end{aligned}$$

**3b** Si  $p = 1$  entonces  $q = \infty$  y de esta manera

$$\begin{aligned}
 \|s_4\|_q &= \|s_4\|_\infty \\
 &= \sup_{a \leq x \leq b} \{|s_4(x)|\} \\
 &= \max\left\{ \sup_{a \leq x \leq \frac{a+b}{2}} \{-s_4(x)\}, \sup_{\frac{a+b}{2} \leq x \leq b} \{-s_4(x)\} \right\} \\
 &= \frac{(b-a)^4}{1152}.
 \end{aligned}$$

Luego, en ??, se obtiene

$$\begin{aligned}
 |\Re_S(f)| &= \left| \int_a^b s_4(x) f^{(IV)}(x) dx \right| \\
 &\leq \int_a^b |s_4(x)| |f^{(IV)}(x)| dx \\
 &\leq \|s_4\|_q \|f^{IV}\|_p \\
 &= K(4, 1)(b-a)^4 \|f^{IV}\|_1
 \end{aligned}$$

**3c** Si  $p = \infty$ , entonces  $q = 1$  y se tiene lo siguiente

$$\int_a^b |s_4(x)| \, dx$$

$$+ \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left[ x^4 - 3bx^3 + 3b^2x^2 - b^3x - \frac{x^3}{3}(2a+b) + bx^2(2a+b) - b^2x(2a+b) + \frac{b^3}{3}(2a+b) \right] dx \Bigg]$$

Mediante el desarrollo y simplificación de términos, esta última expresión se reduce a lo siguiente:

$$-\frac{1}{720}(b^5 - a^5 + 5ab^4 - 5ba^4) - \frac{1}{576}(a^5 + 3ba^4 + 2b^2a^3 - 2b^3a^2 - 3ab^4 - b^5)$$

la cual, simplificando, se obtiene

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{720}(b^5 - a^5 + 5ab^4 - 5ba^4) - \frac{1}{576}(a^5 + 3ba^4 + 2b^2a^3 - 2b^3a^2 - 3ab^4 - b^5) \\ & -\frac{1}{2880}[4b^5 - 4a^5 + 20ab^4 - 20ba^4 + 5a^5 + 15ba^4 + 10b^2a^3 - 10b^3a^2 - 15ab^4 - 5b^5] \\ & = -\frac{1}{2880}[-b^5 + 5ab^4 - 10a^2b^3 + 10a^3b^2 - 5a^4b + a^5] \\ & = \frac{(b-a)^5}{2880} \\ & = K(4, \infty)(b-a)^{4+\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Sustituyendo esta expresión en ??, se obtiene 5 para el caso  $n = 4$ .

En resumen, ?? es válido  $para n = 2, 3, 4, \dots$ . Esto concluye la demostración. ■

**Observación 3.** Se puede redefinir  $K(1, p)$  como sigue:

$$K(1, p) = \begin{cases} \frac{1}{6} \left[ \frac{2^{q+1}+1}{3(q+1)} \right]^{\frac{1}{q}} & \text{si } 1 < p < \infty \\ \frac{1}{3} & \text{si } p = 1 \\ \frac{5}{36} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

De esta manera, el teorema 5 generaliza los resultados expuestos en [45], [47] y el Teorema 4.

**Observación 4.** Si  $n = 4, p = \infty$ , el Teorema 5 generaliza la clásica Desigualdad de Simpson.

**Observación 5.** En [46] se puede ver otra generalización de la Desigualdad de tipo Simpson para funciones  $f$  tales que  $f^{(n)}$  es de variación acotada sobre  $[a, b]$ .

**Corolario 3.** Sea  $n \in \{2, 3, 4\}$ ,  $p, q \in [1, \infty]$  números conjugados. Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función tal que  $f^{(n-1)} \in AC[a, b]$  con  $f^{(n)} \in L^p[a, b]$  y  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_m\}$  una partición de  $[a, b]$ . Entonces el residuo  $R(f, P)$  de la fórmula de Simpson satisface lo siguiente:

$$|R(f, P)| \leq K(n, p) \|f^{(n)}\|_p \sum_{k=0}^{m-1} h_k^{n+\frac{1}{q}}$$

Donde  $K(n, p)$  está definida como en 5 y  $h_k = x_{k+1} - x_k$ .

### Demostración:

Por hipótesis,  $f$  es una función  $n$  veces diferenciable tal que  $f^{(n-1)}$  es absolutamente continua sobre  $[a, b]$  y  $f^{(n)} \in L^p[a, b]$ . Por ende, para cada  $k = 0, 1, \dots, n-1$ ,  $f$  satisface estas premisas en  $[x_k, x_{k+1}]$ . Luego, por el Teorema 5, se tiene lo siguiente

$$\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx - \frac{x_{k+1} - x_k}{6} \left[ f(x_k) + 4f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) + f(x_{k+1}) \right] \right| \leq K(n, p) \|f^{(n)}\|_p h_k^{n+\frac{1}{q}}.$$

Sumando estas desigualdades sobre  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , y junto a las desigualdad triangular y la aditividad de la integral sobre intervalos, se obtiene:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x_{k+1} - x_k}{6} \left[ f(x_k) + 4f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) + f(x_{k+1}) \right] \right| &\leq \left| \sum_{k=0}^{m-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx - \frac{x_{k+1} - x_k}{6} \left[ f(x_k) + 4f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) + f(x_{k+1}) \right] \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{m-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx - \frac{x_{k+1} - x_k}{6} \left[ f(x_k) + 4f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) + f(x_{k+1}) \right] \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{m-1} K(n, p, [x_k, x_{k+1}]) \left( \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f^{(n)}(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sum_{k=0}^{m-1} K(n, p) \|f^{(n)}\|_p h_k^{n+\frac{1}{q}} \\ &= K(n, p) \|f^{(n)}\|_p \sum_{k=0}^{m-1} h_k^{n+\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

■

Ahora bien, para el caso particular en que  $P$  es una partición equidistante,  $h_k = \frac{b-a}{n}$  y usando el hecho de que  $p, q \in [1, \infty]$  son conjugados, se obtiene lo siguiente:

**Corolario 4.** Sea  $n \in \{2, 3, 4\}$ ,  $p, q \in [1, \infty]$  números conjugados. Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función tal que  $f^{(n-1)} \in AC[a, b]$  con  $f^{(n)} \in L^p[a, b]$  y  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_m\}$  una partición equidistante de  $[a, b]$ . Entonces el residuo  $R(f, P)$  de la fórmula de Simpson satisface lo siguiente:

$$|R(f, P)| \leq K(n, p) \|f^{(n)}\|_p \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(b-a)^{n+\frac{1}{q}}}{m^{n-\frac{1}{p}}}$$

Donde  $K(n, p)$  está definida como en 5 y  $h_k = x_{k+1} - x_k$ .

**Teorema 6.** Sea  $P : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua en  $[a, b]$  y diferenciable en  $(a, b)$ . sean  $\gamma, \Gamma$  números reales tales que, para todo  $t \in [a, b]$ ,

$$\gamma \leq f'(t) \leq \Gamma$$

entonces se obtiene la siguiente desigualdad:

$$\left| (C - A)f(a) + (b - a - B + A)f(x) + (B - C)f(b) - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{1}{4}(\Gamma - \gamma)(M_x - m_x)(b - a)$$

donde

$$C \equiv C(x) = \frac{1}{2(b-a)} [(x-a)(x-a+2A) - (x-b)(x-b+2B)]$$

### **Demostración:**

Por la desigualdad de Grüss, dada en ?? se tiene que

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b p_x(t) f'(t) dt - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \cdot \frac{1}{b-a} \int_a^b p_x(t) dt \right| \leq \frac{1}{4}(\Gamma - \gamma)(M_x - m_x)$$

para todo  $x \in [a, b]$ .

Ahora bien, mediante integración por partes, se tiene:

$$\int_a^b p_x(t) f'(t) dt = Bf(b) - Af(a) - [p]_x f(x) - \int_a^b f(x) dx$$

y también



$$\begin{aligned}
\int_a^b p_x(t) dt &= \int_a^x (t - a + A) dt + \int_x^b (t - b + B) dt \\
&= \left. \frac{t^2}{2} - at + At \right|_a^x + \left. \frac{t^2}{2} - bt + Bt \right|_x^b \\
&= \frac{x^2}{2} - ax + Ax - \frac{a^2}{2} + a^2 - Aa + \frac{b^2}{2} - b^2 + Bb - \frac{x^2}{2} - bx + Bx \\
&= \frac{x^2}{2} + (A - a)x - \frac{a^2}{2} + (a - A)a + \frac{b^2}{2} - (B - b)b - \frac{x^2}{2} + (b - B)x \\
&= \frac{1}{2} [x^2 + 2x(A - a) - a^2 + 2a(a - A) + b^2 - 2b(B - b) - x^2 + 2x(b - B)] \\
&= \frac{1}{2} [(x - a)(x - a + 2A) - (x - b)(x - b + 2B)].
\end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones en ?? y efectuando manipulaciones algebraicas, se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}(\Gamma - \gamma)(M_x - m_x) &\geq \left| \frac{1}{b-a} \left( Bf(b) - Af(a) - [p]_x f(x) - \int_a^b f(x) dx \right) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \cdot \frac{1}{2(b-a)} \right| \\
&= \left| \frac{1}{b-a} \left( Bf(b) - Af(a) - [p]_x f(x) - \int_a^b f(x) dx \right) - C(x) \left( \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \right) \right| \\
&= \left| \frac{1}{b-a} \left[ (B - C)f(b) + (C - A)f(a) - [p]_x f(x) - \int_a^b f(x) dx \right] \right|.
\end{aligned}$$

Lo cual equivale a 6.

■

**Corolario 5.** Si  $A, B \in \mathbb{R}$  tales que  $0 \leq B - A \leq \frac{b-a}{2}$  y  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua en  $[a, b]$ , diferenciable en  $(a, b)$ . se tiene que

$$\left| \left( \frac{B-A}{2} \right) f(a) + [b-a-B+A] f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \left( \frac{B-A}{2} \right) f(b) - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{1}{4}(\Gamma - \gamma)[b-a-B+A](b-a)$$

**Demostración:**

Consideremos  $x = \frac{a+b}{2}$ , luego

$$\begin{aligned}
x - a &= \frac{b - a}{2} \\
x - b &= -\frac{b - a}{2} \\
C \left( \frac{a + b}{2} \right) &= \frac{1}{2(b - a)} \left[ \left( \frac{b - a}{2} \right) \left( \frac{b - a}{2} + 2A \right) + \left( \frac{b - a}{2} \right) \left( 2B - \frac{b - a}{2} \right) \right] \\
&= \frac{A + B}{2}.
\end{aligned}$$

Por el Corolario 6, se obtiene que

$$\left| (C - A)f(a) + [b - a - B + A]f\left(\frac{a + b}{2}\right) + (B - C)f(b) - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{1}{4}(\Gamma - \gamma)(M_x - m_x)(b - a)$$

lo cual, en el caso particular en  $x = \frac{a+b}{2}$ , la desigualdad anterior puede reescribirse como

$$\left| \left( \frac{B - A}{2} \right) f(a) + (b - a - B + A)f(x) + \left( \frac{B - A}{2} \right) f(b) - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{1}{4}(\Gamma - \gamma)(M_x - m_x)(b - a)$$

Por último, nótese que

$$a + B - A \leq \frac{a + b}{2} \leq b - B + A$$

Entonces  $M_x - m_x = b - a - B + A$ . Luego

$$\left| \left( \frac{B - A}{2} \right) f(a) + (b - a - B + A)f\left(\frac{a + b}{2}\right) + \left( \frac{B - A}{2} \right) f(b) - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{1}{4}(\Gamma - \gamma)(b - a - B + A)(b - a)$$

■

**Observación 6.** Si en 5 se particulariza  $B - A = \frac{b-a}{3}$ , se obtiene la siguiente desigualdad de tipo Simpson

$$\left| \frac{b - a}{6} \left[ f(a) + 4f\left(\frac{a + b}{2}\right) + f(b) \right] - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{1}{6}(\Gamma - \gamma)(b - a)^2$$

esto da lugar al siguiente corolario.

**Corolario 6.** Sea  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  una función continua en  $[a, b]$ , diferenciable en  $(a, b)$  y sean  $\gamma, \Gamma \in \mathbb{R}$  tales que, para todo  $t \in (a, b)$

$$\gamma \leq f'(t) \leq \Gamma$$

Si  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  es una partición de  $[a, b]$ , el resto  $R(f, P)$  de la fórmula de Simpson satisface la desigualdad

$$|R(f, P)| \leq \frac{2}{3}(\Gamma - \gamma) \sum_{k=0}^{n-1} h_k^2$$

donde, para  $k = 0, 1, \dots, n-1$ ,  $h_k = \frac{x_{k+1} - x_k}{2}$ .

**Observación 7.** Si  $P$  es una partición equidistante,  $h_k = \frac{b-a}{2n}$  y así, la desigualdad anterior se transforma en

$$|R(f, P)| \leq \frac{\Gamma - \gamma}{6n} (b-a)^2$$

**Proposición 4.** Si  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  una función absolutamente continua en  $[a, b]$  tal que  $f' \in L^p[a, b]$  y sean  $a \leq \alpha_1 \leq x_1 \leq \alpha_2 \leq b$ , entonces

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx - [(\alpha_1 - a)f(a) + (\alpha_2 - \alpha_1)f(x_1) + (b - \alpha_2)f(b)] \right| &\leq \frac{\|f'\|_p}{(q+1)^{\frac{1}{q}}} [(\alpha_1 - a)^{q+1} + (x_1 - \alpha_1)^{q+1}] \\ &\leq \frac{\|f'\|_p}{(q+1)^{\frac{1}{q}}} [(x_1 - a)^{q+1} + (b - x_1)^{q+1}] \\ &\leq \frac{(b-a)^{1+\frac{1}{q}}}{(q+1)^{\frac{1}{q}}}. \end{aligned}$$

**Observación 8.** Si se considera el caso particular en el cual  $\alpha_1 = a, \alpha_2 = b$  y  $x_1 = \frac{a+b}{2}$ , se obtiene la siguiente desigualdad para la fórmula de cuadratura del punto medio.

**Corolario 7.** Si  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  una función absolutamente continua en  $[a, b]$ , entonces

**Observación 9.** Si en particular  $\alpha_1 = \frac{5a+b}{6}, \alpha_2 = \frac{5b+a}{6}$  y  $x_1 = \frac{a+b}{2}$  se obtiene la desigualdad de Simpson demostrada en el Teorema 4.

**Observación 10.** • Si  $x_1 = \frac{a+b}{2}$  se obtiene una generalización de la Fórmula de cuadratura de Punto Medio

$$\left| \int_a^b f(x) dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \right| \leq \frac{(b-a)^{1+\frac{1}{q}}}{2(q+1)^{\frac{1}{q}}} \|f'\|_p$$

- Si en particular  $\alpha_1 = \frac{5a+b}{6}, \alpha_2 = \frac{5b+a}{6}$  y  $x_1 = \frac{a+b}{2}$  se obtiene la desigualdad de Simpson demostrada en el Teorema 4, El resultado principal de este Capítulo

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{3} \left[ \frac{f(a)+f(b)}{2} + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] \right| \leq \frac{1}{6} \left[ \frac{2^{q+1}+1}{3(q+1)} \right]^{\frac{1}{q}} (b-a)^{1+\frac{1}{q}} \|f'\|_p$$

Por último, también se tiene la siguiente generalización

**Teorema 7.** Suponga  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo abierto y  $[a, b] \subset I$ . Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable y números reales  $\gamma, \Gamma \in \mathbb{R}$  tales que

$$\gamma \leq f'(t) \leq \Gamma$$

luego, se tiene la siguiente desigualdad para la Fórmula de cuadratura compuesta de tipo Simpson

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{N} \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \frac{1}{6} f(x_{k0}) + \frac{2}{3} f(x_{k1}) + \frac{1}{6} f(x_{k2}) \right] \right| \leq \frac{5(\Gamma - \gamma)}{72N} (b-a)^2$$

donde  $x_{k0} = x_k$ ,  $x_{k1} = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$ ,  $x_{k2} = x_{k+1}$

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] J. M. ORTEGA, *Introducción al análisis matemático*. Primera edición, Universitat Autònoma de Barcelona, Bellaterra, Barcelona: Editorial Labor, 1993.
- [2] F. M. CLARKE, *Thomas Simpson and his times*. New York, 1929.
- [3] JULIÀ D., BRUNO y M. M. GUILLEUMAS, *Análisis matemático de una variable*. Primera edición, Universitat de Barcelona, España,(2008).
- [5] G. J., FERNÁNDEZ; A. GARCÍA,P. MARTÍN[et. al], *Fundamentos de las matemáticas: Teoría y problemas*. Primera edición, Madrid: Editorial Delta Publicaciones, 2006.
- [6] S. L. SALAS; E. HILLE y G. J. ETGEN, *Calculus: una y varias variables*. Cuarta edición, Barcelona, España: Editorial Reverte, 2007.
- [7] A. ENGLER,D. MULLER, S. VRANCKEN y M. HECKLEIN, *El Cálculo diferencial*. Primera edición, Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, Argentina, ediciones UNL, 1973.
- [8] H. MÉNDEZ, *Cálculo diferencial*. 3ra reimpresión, primera edición, San Jose, Costa Rica: Editorial EUNED, 2003.

- 
- [9] A. RUIZ y H. BARRANTES, *Elementos de cálculo diferencial: Historia y ejercicios resueltos*. Primera edición, Ciudad Universitaria, Universidad de Costa Rica: Editorial Universidad de Costa Rica, 1997.
- [10] B. KOLMAN y D.R. HILL, *Álgebra lineal*, Octava edición, México: Editorial Pearson Educación, 2006.
- [11] J.M. CASTELEIRO y R.P. GÓMEZ, *Cálculo Integral*, Octava edición, Pozuelo de Alarcón, Madrid, España: Editorial ESIC, 2006.
- [13] J. CERDA, *Análisis Real*, Universitat de Barcelona, Barcelona, España: Col·lecció UB, 1996.
- [14] S.S DRAGOMIR, R.P. AGARWAL y P. CERONE, *Inequalities of Ostrowski Grüss-type and applications*, Applicationes Mathematicae, Vol 29,4 (2002), pp 465-479.
- [15] E.B. JARAUTA, *Análisis Matemático de Una Variable: Fundamentos y Aplicaciones*, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, España: Ediciones UPC, 2000.
- [16] H. BARRANTES, *Cálculo Integral en una variable*, 1ra edición, Universidad Estatal a Distancia, San Jose, Costa Rica: Editorial EUNED, 1997.
- [17] P.T. MORATALLA, *De la noción de área a su definición*, 1ra edición, Universidad de Castilla-La Mancha, Castilla-La Mancha, España: Colección Ciencia y Técnica, 1993.
- [18] G. T. BRINTON, *Cálculo: Una variable*, undécima edición, Addison Wesley Longman, México, 1998.
- [19] E.L. ESCARDO, *Principios de Análisis Matemático*, Barcelona, España: Editorial Reverté S.A., 1991.

- 
- [20] FRANCO N. MANUEL; GONZALEZ M. FRANCISCO y MOLINA L. ROQUE, *Leciones de cálculo infinitesimal I*[pp. 164], cuarta edición, Secretariado de publicaciones, Universidad de Murcia, Murcia, España, 1994.
- [21] E.J. PURCELL; D. VARBERG y S.E. RIGDON, *Cálculo*, octava edición, Edo. de México, México: Editorial Pearson Educación, 2001.
- [22] SPIVAK MICHAEL, *Calculus: Cálculo infinitesimal*, segunda edición, Barcelona, España: Editorial Reverté S.A., 1992.
- [23] APOSTOL TOM, *Análisis Matemático*, segunda edición, Barcelona, España: Editorial Reverté S.A., 1976.
- [24] S.S. DRAGOMIR, R.P. AGARWAL y P. CERONE, *On Simpson's inequality and applications*, Tamkang Journal of Mathematics, Vol: 30 (1999), pp. 53-58.
- [25] H. M. PROTTER y C. B. MORREY, *A First Course in Real Analysis*, segunda edición, Undergraduate Text in Mathematics: Editorial Springer, 1991.
- [26] H.L. ROYDEN y P.M. FITZPATRICK, *Real Analysis*, cuarta edición, New York, United States: Editorial Pearson Education, Inc.(Publicado como Prentice Hall),2010.
- [27] CARRACEDO M. CELSO y ALIX SANZ A. MIGUEL, *Análisis de una variable real*, Barcelona, España: Editorial Reverté, 1992.
- [28] M.K. VAMANAMURTHY y M. VUORINEN, *Inequalities for means*. Journal of Mathematics Analysis and Applications. Vol:183 (1992).
- [29] J. APPELL, J. BANAS y N. MERENTES *Bounded variation and around*. Mathematics Subject Classification 2010: Editorial Walter De Gruyter, (2013).
- [30] A.R. CAMACHO(2009) *El Cálculo diferencial*. Primera edición, Universidad Nacional del Litoral, Madrid, México, ediciones Diaz de Santos.

- [31] APOSTOL TOM y FRANCISCO VÉLEZ CANTARELL(2009) *Calculus I*. Primera edición. Vol:1, Barcelona, España, Editorial Reverté.
- [32] C. BETZ (1992) *Introducción a la Teoría de la Medida e Integración*, Universidad Central de Venezuela, Facultad de Ciencias.U.C.V.
- [33] ILEANA IRIBARREN *Introducción a la Teoría de la Medida*, Universidad Central de Venezuela, Facultad de Ciencias.U.C.V.(2006)
- [34] JORGE SAENZ *Cálculo diferencial con funciones trascendentes tempranas para ciencias e ingeniería*, segunda edición, Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado, Barquisimeto, EDO Lara (2005)
- [35] ROBERT G. BARTLE *A Modern Theory of Integration*. Volumen 32, American Mathematical of Society, Editorial Board (2001)
- [36] R. L. WHEEDEN y A. ZYGMUND *Measure and Integral: An Introduction to Real Analysis*, Madison Avenue, New York, United States: Editorial Marcel Dekker,(1977).
- [37] H. M. PROTTER, *Basic Elements of Real Analysis*, primera edición, Library of Congress Cataloging in Publication Data: Editorial Springer, 1998.
- [38] RALPH HENSTOCK, *Lectures on the Theory of Integration*, primera edición, Box 128, Farrell Road, Singapore Data: World Cientifics Publishing, 1988.
- [39] J. PECARIC y S VAROSANEC, *A note on Simpson's inequality for functions of bounded variation*, Tamkang Journal of Mathematics. Vol:31, NÂ° 3, Autumn (2000).
- [40] H.L.ROYDEN, *Real Analysis*, Tercera edición, New York: Editorial Macmillan Publishing Company (1988).



- [41] H.B.NORMAN y S.A. JOSEPH, *Real Analysis*, New York, United States; Editorial Dovers Publications Inc. 1991.
- [42] A. HALD, *A History of Probability and Statistics and their applications before 1750*, Hoboken, New Jersey, United States of America: Editorial A John Wiley and Sons, Inc. 2003.
- [43] R. KRESS, *Numerical Analysis*, New York, editorial Springer- Verlag, 1998.
- [44] D.J. PHILLIPS y R.PHILLIP, *Methods of numerical integration*, segunda edición, Mineola, New York: editorial Dovers Publications, Inc. 1984.
- [45] S.S. DRAGOMIR, *On Simpson's quadrature formula for lipschitzian mappings and applications*, Soochow Journal of Mathematics. Vol:25 (April 2000), pp 175-180.
- [46] J. PECARIC y S VAROSANEC, *A note on Simpson's inequality for functions of bounded variation*, Tamkang Journal of Mathematics. Vol:31, N.º 3, Autumn (2000).
- [47] S.S.DRAGOMIR, R.P. AGARWAL y P. CERONE, *On Simpson's inequality and applications*, Mathematics Subject Classifications, April 1999.
- [48] A. AUBANELL, A. BENSONY y D. AMADEUS, *Útiles Básicos de Cálculo Numérico*, Escole Pies, Barcelona: Editorial Labor S.A., 1993.
- [49] NENAD UJEVIC, *Two sharp inequalities of Simpson type and applications*, Georgian Mathematical Journal. Vol:11 (2004), N.º 1, pp 187-194.
- [50] S.S.DRAGOMIR, *On Simpson Quadrature Formula for differentiable mappings whose derivatives belong in  $L^p$  spaces and applications*, Mathematics Subject Classifications, Diciembre (1998).
- [51] B.C. CARLSON, *Algorithms Involving Arithmetic and Geometric Means*, The American Mathematical Monthly. Vol:78, Nro 5 (Mayo 1971), pp 496-595.

- [52] D.S. MTRINOVIC, P.S. BULLEN y P.M. VASIC, *Means and their inequalities*, D.Reidel Publishing Company,1998.
- [53] J. PECARIC y S VAROSANEC, *The logarithmic mean in  $n$  variables*, The American Mathematical Monthly. Vol:92, NÂ° 2 (Febrero, 1985),pp 99-104.
- [54] E NEWMAN, *A weigthed logarithmic mean*, Journal of Mathematical Analysis and Applications. Vol:188, Issue 3 (Diciembre 1994),pp 885-900.
- [55] E NEWMAN, *Stolarsky mean of several variables*, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics. Vol:6 (2005), Issue 2, Art:30.
- [56] M.O. HASNA y M.S. ALOUINI, *Harmonic Mean and end-to-end perfomance of transmission systems with relays*, IEEE Transactions on Communications. Vol:52, Issue 1, (Enero 2004), pp 130-135.
- [57] E.T. ANGUS, *Introduction to functional analysis*, primera edición,New york, United States of América. Editorial John Wiley and Sons Inc, 1958.
- [58] V. GERDT, W. KOEPF, W.M. SEILER y E.V. VOROZHTSOV, *Computer Algebra in Scientific Computing: 17th International workshop*,Aatchen, Germany (September 14-18, 2015): Editorial Springer- Verlag.(serie: Lecture notes in Computer Science)
- [59] OMRAN KOUBA , *New bounds of the identric mean of two arguments*,Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics. Vol:9 (2008). Issue 3. Art: 71, pp 6.
- [60] ZHIENG HANG YANG, *New sharp bounds for logarithmic mean and identric mean*, Journal of Inequalities and Applications (2013) 2013:116.
- [61] J. SANDOR, *On the identric and logarithmic means*, Aequationes mathematicae. Vol:40 (1990). Issue 2-3, pp 261-270 2013:116.

- 
- [62] KENDALL C. RICHARDS y HILARI C. TIEDEMAN, *A note on weighed identric and logarithmic mean*, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics. Vol:7 (2006). Issue 5. Art:157, pp 261-270.
  - [63] MIHALY BENCZE, *New identities and inequalities for the identric mean*, Octagon Mathematical Magazine. Vol:17, N.º 2 (October 2009), pp 580-598.
  - [64] E.A. VOLKOV, *Numerical methods*, primera edición, Moscow, Russia: Editorial Mir Publishers 1986.
  - [65] F.A. MEDVEDEV, *Scenes from a the History of Real Functions*, Basel Suiza: Editorial Springer, 1991 (Serie Science Network Historical Studies).
  - [66] N. BOURBAKI, *Éléments d'histoire des mathématiques*, Basel Suiza: Editorial Elsevier Masson, 1984.
  - [67] N.L. CAROTHERS *Real analysis* The Pitt Building, Trumpington Street, Cambridge, UK: Editorial Cambridge University Press 2000.
  - [68] E. CONFALONIERI *AN ESSAY ON THE MATHEMATICAL METHODS OF THEORY OF GENERAL RELATIVITY* The Pitt Building, Trumpington Street, Cambridge, UK: Editorial Cambridge University Press 2000.
  - [69] W.F. PFEFFER *Derivation and Integration* The Pitt Building, Trumpington Street, Cambridge, UK: Editorial Cambridge University Press (Cambridge Tracts in Mathematics) 2001.
  - [70] V.I. BOGACHEV *Measure Theory* Volume I, Berlín, Heidelberg: Editorial Springer Verlag, 2007.
  - [71] N. BOURBAKI *Integration I: Chapters 1-6* Berlín, Heidelberg: Editorial Springer, Treatise of Éléments de mathématique, 2004.

- 
- [72] J.J. BENEDETTO y W. CZAJA, *Integration and Modern Analysis* First edición, Boston, Massachussets USA: Editorial Springer Verlag,(Birkhäuser Advanced Text Basler Lehrbücher), 2004.
  - [73] S. SIMIC, *An Extension of Stolarsky Means to the Multivariable Case*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. (2009).Article ID 432857, 14 pp.
  - [74] DA-FENG XIA,SEN-LIN XU y FENG QI , *A proof of the Aritmetic mean, Geometric mean, Harmonic mean inequalities*, RGMIA Research Report Collection, Vol. 2, No. 1, 1999 (Disponible en <http://ajmaa.org/RGMIA/papers/v2n1/v2n1-10.pdf>).
  - [75] M. RAÏSSOULI y J. SÁNDOR, *On a method of construction of new means with applications*, Journal of Inequalities and Applications. (2013).
  - [76] F. BURK, *The Geometric, Logarithmic, and Arithmetic Mean Inequality*, The American Mathematical Montly, Vol. 94, No. 6. (Junio - Julio 1987), pp. 527-528.
  - [77] J. PECARIC y G. ROQIA, *Generalization of Stolarsky Type Means*,Journal of Inequalities and Applications,Volume 2010, Article ID 720615, 15 pp.
  - [78] T. ANDO, *On the Arithmetic-Geometric-Harmonic-Mean Inequalities for Positive Definite Matrices*, Linear algebra and its Applications, 1983, Vol. 52, pp. 31-37.
  - [79] E NEWMAN y J. SANDOR, *On certain means of two arguments and their extensions*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2003, Vol. 2003, No 16, pp. 981-993.
  - [80] S.S. DRAGOMIR,R.P. AGARWAL y P. CERONE, *On Simpson's quadrature formula for mappings of bounded variation and applications*, Journal of Inequalityes applications , Vol 5 N°6 (2000),pp. 533-579.