

Projektna naloga iz matematična fizika

Keplerjev problem

Nikola Miljevski
28030415

Povzetek

V nalogi numerično rešujem Keplerjev problem in sicer na tri načine: z metodo linearizacije, z Eulerjevo in z Runge-Kutta metodo. Na koncu primerjam vse trije metode glede na časovno zahtevost in natančnost rezultate.

1 Keplerjev problem

Keplerjev problem je v splošnem problem določanja orbite in hitrosti dveh teles med katerima deluje centralna sila ki pada z kvadratom razdalja med njima. Zgodovinski to je bil problem določanja Zemljine orbite ter orbite drugih planet ki se gibljejo okoli našega Sonca. Tako sem tudi jaz v nalogi obravnaval gibanje Zemlje okoli Sonca.

Sila ki jo čuti Zemlja v polju Sonca lahko zapišemo takole: $\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^3}\mathbf{r}$, kjer je M masa Sonca, m masa Zemlje in r razdalje med njima. Zdaj lahko zapišemo štiri enačbe s pomočjo katerih bomo znali določiti hitrost in položaj zemlje v vsakem trenutku. Vpliv ostalih planet na orbita Zemlje ne upoštevam, saj je majhen in tudi za te naloge ni potreben.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= v_x \\ \frac{dy}{dt} &= v_y \\ \frac{dv_x}{dt} &= -\frac{GM}{r^3}x \\ \frac{dv_y}{dt} &= -\frac{GM}{r^3}y\end{aligned}$$

Prve dve enačbe sledijo iz definicije hitrosti, druge dve pa iz drugega Newtonovega zakona zapisan za Zemlje. Izhodišče koordinatnega sistema je v središču Sonca.

2 Metoda linearizacije

Očitno naš sistem ni linearen, ker x in y se skrivata v r . Namreč, $r^2 = x^2 + y^2$. Ideja metode linearizacije je, da sistem lineariziramo okoli izbrane začetne točke po Taylorovi metodi in ga rešujemo kot linearen nehomogen sistem štirih diferencialnih enačb. V splošnem dana funkcija $f(x, y)$ lahko razvijemo po Taylorovem principu v okolici točke (a, b) do prvega reda takole:

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}|_{(a,b)}(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}|_{(a,b)}(y - b) \quad (1)$$

Če to naredimo za \dot{v}_x in \dot{v}_y , pri čem pika pomeni odvod po času t , dobimo:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{3GMa^2}{(a^2+b^2)^{2.5}} - \frac{GM}{(a^2+b^2)^{1.5}} & \frac{3GMab}{(a^2+b^2)^{2.5}} & 0 & 0 \\ \frac{3GMab}{(a^2+b^2)^{2.5}} & \frac{3GMb^2}{(a^2+b^2)^{2.5}} - \frac{GM}{(a^2+b^2)^{1.5}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ v_x \\ v_y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3GMa(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)^{2.5}} \\ \frac{3GMb(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)^{2.5}} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Zdaj naš problem je zapisan v obliki $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} - \mathbf{p}$. Takšne vrste sisteme znamo reševati. Posebej poiščemo rešitev homogenega dela sistema in potem še partikularna rešitev. Splošna rešitev je vsota teh dveh rešitev.

Homogeni del našega sistema se glasi: $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$. Izberemo nastavek $\mathbf{x}(t) = e^{rt}\mathbf{u}$. Ko le to vstavimo v sistem, dobimo problem lastnih vektorjev in lastnih vrednosti. Dobimo da rešitev homogenega dela se glasi: $\mathbf{x}_h = c_1 e^{r_1 t} \mathbf{u}_1 + c_2 e^{r_2 t} \mathbf{u}_2 + c_3 e^{r_3 t} \mathbf{u}_3 + c_4 e^{r_4 t} \mathbf{u}_4$, kjer so r_1, r_2, r_3, r_4 realni lastni vrednosti matrike A , $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ pa pripadajoči lastni vektorji. Če pa za lastna vrednost dobimo dve kompleksno konjugirani števila $\alpha \pm i\beta$ in pripadajoči lastni vektorji $\mathbf{a} \pm i\mathbf{b}$, potem dobimo naslednje dve linearno neodvisni rešitvi: $\mathbf{x}(t) = e^{\alpha t} \cos(\beta t) \mathbf{a} - e^{\alpha t} \sin(\beta t) \mathbf{b}$ in $\mathbf{x}(t) = e^{\alpha t} \sin(\beta t) \mathbf{a} + e^{\alpha t} \cos(\beta t) \mathbf{b}$.

Za partikularna rešitev izberemo nastavek $\mathbf{x}_p = \mathbf{h}$, kjer je \mathbf{h} nek konstantni vektor. Potem dobimo enačbo $\mathbf{0} = A\mathbf{h} - \mathbf{p}$ in iz tega sistema dobimo \mathbf{h} . V Matematici rešitev dobimo z ukazom .

Zdaj imamo celotno rešitev sistema, ki je $\mathbf{x}_h + \mathbf{x}_p$ in tako dobimo $\mathbf{x} = V(t)\mathbf{c} + \mathbf{h}$, kjer je $V(t)$ matrika odvisna od časa, \mathbf{c} pa je vektor koeficientov v rešitvi za

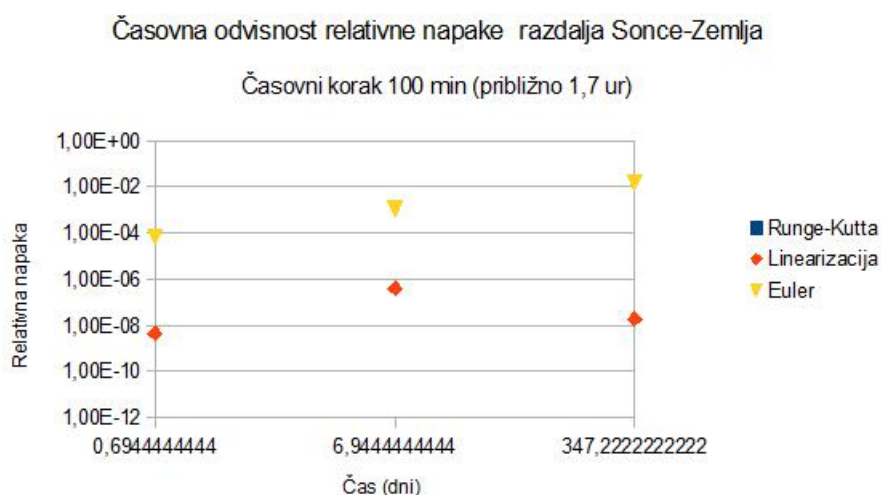
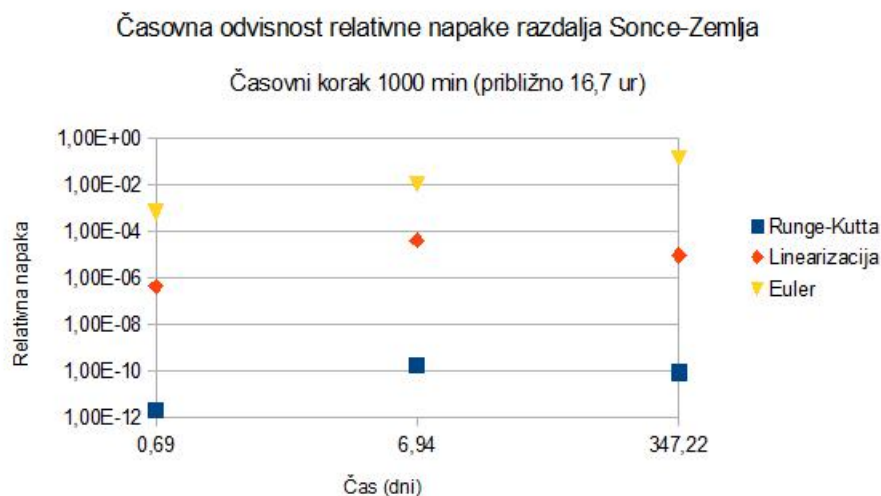
homogeni del. Ta vektor moramo določiti numerično, z reševanjem sistema enačb: $\mathbf{x} - \mathbf{h} = V(t)\mathbf{c}$. Ko enkrat dobimo koeficiente, v enačbi $\mathbf{x} = V(t)\mathbf{c} + \mathbf{h}$ povečamo čas t za Δt in tako dobimo novi vrednosti za položaj in hitrost Zemlje. Zdaj začetni sistem razvijemo okoli te točke ki smo jih nazadnje dobili in postopek ponovimo do koncu. Postopek ponavljamo poljubno dolgo. Časovni korak Δt je tudi poljubno dolg, vendar je za pričakovati da manjši korak bo dal natančnejše rezultate.

3 Rezultati

Z metodo linearizacije, Runge-Kutta in Eulerovo metodo sem izračunal razdalje Zemlje od Sonca in velikost hitrosti Zemlje v določenih točkah njene orbite, kot tudi minimalno razdalje Zemlje od Sonca. Za časovni korak sem vzel 1, 10, 100 in 1000 minut, tako da sem primerjal še natančnost pri različnih časovnih korakih. Pri primerjavi se postavlja vprašanje, glede na katero vrednost bomo primerjali vse trije metode, oziroma katero vrednost bomo vzeli za "natančno", glede na katero bomo gledali odstopanja. Tukaj se pojavljata dva premisleka. Prvo, če vsaj dve metode pri vsaj najmanjšem časovnem koraku dajeta enake rezultate, zelo verjetno te rezultate so najbližje kar je možno natančni vrednosti. Drugo, če ena metoda daje enake rezultate pri različnih časovnih korakih, zelo verjetno te rezultate so najbližje kar je možno natančni vrednosti. V mojem primeru obadva pogoja sta izpolnjena. Namreč, metoda linearizacije in Runge-Kutta dajeta rezultat za razdalje Sonce-Zemlja po 60.000s od začetka štetja časa rezultat ki se razlikuje samo za reda velikosti 0.1m. Rezultate Eulerjeve metode odstopajo za reda velikosti 1.000km, zato predvidevamo da rezultat ki ga dajeta metoda linearizacije in Runge-Kutta je najbližje natančni vrednosti. Od te dve metode, le Runge-Kutta daje rezultati ki so enaki do decimeter natančno ko računamo z korakom 1 minuta, s korakom 10 minuti in celo s korakom 100 minuti. Praktično se ne spreminjajo, zaradi česa sklepam da Runge-Kutta je dosegla najbolj natančne vrednosti. Zato vzamem rezultate ki jih daje Runge-Kutta s korakom 1 minuta za "natančne" in glede na njih primerjam odstopanja vseh drugih rezultatov. Te rezultate so podani v spodnji tabeli.

t (s)	r (m)	v (m/s)
60.000	152.080.637.869,2	29.293,4
6.000.000	150.520.492.537,8	29.600,7
30.000.000	151.983.307.069,1	29.312,5

Rezultati za relativne napake oddaljenosti Zemlje od Sonca so prikazani na spodnje slike:

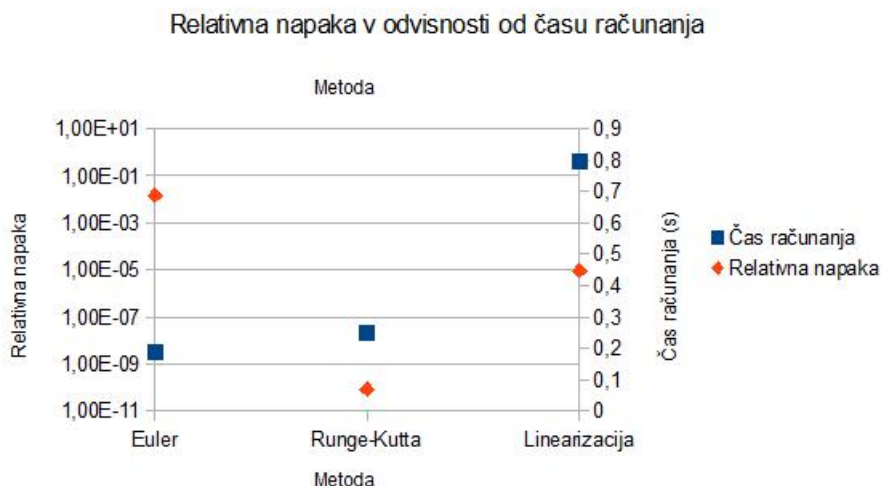


Pri koraku 100 min je napaka rezultate ki jih daje metoda Runge-Kutta manjša kot $3 \cdot 10^{-13}$ za natančnostjo s katero sem jaz računal je praktično 0, tako da se ne nahaja v ustreznem grafu.

Očitno je da metoda Runge-Kutta je superiorna in njene rezultate so bistveno natančnejši kot druge dve metode. Metoda linearizacije daje pa natančnejši rezultati kot Eulerjeva metoda.

Kako je pa z časovno zahtevnostjo algoritma? Na spodnjo sliko sem narisal relativne napake razdalja Sonce-Zemlja v odvisnostjo od času računanja. Jasno je da Runge-Kutta daje bistveno bolj natančne rezultate kot linearizacija, ob tem da se z linearizacijo računa skoraj trikrat dle. Se pravi, Runge-Kutta je tudi časovno superioren. Vidimo še da ima Eulerjeva metoda najmanjša natančnost, res pa je

da je račun trajal približno štirikrat manj kot z metodo linearizacije. Vendar sem naredil tudi račun ki je trajal približno dvakrat kot z metodo linearizacije in vseeno Eulerjeva metoda je dala rezultat z večjo relativno napako reda velikosti 1000 kot z metodo linearizacije. Se pravi, ne samo da linearizacija daje bolj natančni rezultati kot Eulerjeva metoda, ampak tudi je časovno superiorna.



4 Zaključek

Primerjal sem metodo linearizacije, metodo Runge-Kutta in Eulerjevo metodo pri izračunu razdalja Zemlje od Sonca v določenem času. Rezultate kažejo da je metoda Runge-Kutta bistveno boljša kot metoda linearizacije (se pravi, daje bistveno bolj natančne rezultate v krajšem času računanja), metoda linearizacije pa je bistveno boljša kot Eulerjeva metoda. Zato v primeru kot je Keplejev problem, metoda linearizacije ni dosti uporabna.