

ggg

Indice

1	Introduzione	1
2	Definizioni importanti	2
2.1	Richiami sulla BHK-interpretation	2
2.2	Alcune funzioni ricorsive primitive	2
2.3	Funzioni coppia	3
2.4	T-predicato di Kleene	4
3	Definizione e proprietà della realizzabilità	5
3.1	Introduzione	5
3.2	Definizione realizzabilità	6
3.3	Proprietà della realizzabilità	8
4	Conseguenze della realizzabilità	15
4.1	Teorema di caratterizzazione della realizzabilità	15
4.2	Disjunction and Existence Property	18

Capitolo 1

Introduzione

hgvhjgv

Capitolo 2

Definizioni importanti

2.1 Richiami sulla BHK-interpretation

Negli anni '20, L.E. J. Brouwer espone la sua filosofia intuizionista della matematica. Secondo Brouwer, il significato delle affermazioni matematiche risiede in costruzioni mentali, piuttosto che nel loro riferimento a una realtà supposta platonica.

Definizione 2.1 *La BHK – interpretation è definita dalle seguenti clausole:*

1. *Una dimostrazione di $A \wedge B$ è una coppia $\langle x, y \rangle$ tale che x è una dimostrazione di A e y è una dimostrazione di B .*
2. *Una dimostrazione di $A \vee B$ è una coppia $\langle i, y \rangle$ tale che $i = 0$ e y è una dimostrazione di A o $i = 1$ e y è una dimostrazione di B .*
3. *Una dimostrazione di $A \rightarrow B$ è una funzione f che mappa ogni dimostrazione x di A in una dimostrazione $f(x)$ di B .*
4. *Non esiste una dimostrazione per \perp ; una dimostrazione di $\neg A$ è una funzione che trasforma qualsiasi ipotetica dimostrazione di A in una dimostrazione di \perp .*
5. *Una dimostrazione di $\forall x.A(x)$ è una funzione f che mappa ogni oggetto $d \in D$ (D è il dominio della variabile x) in una dimostrazione $f(d)$ di $A(d)$.*
6. *Una dimostrazione di $\exists x.A(x)$ è una coppia $\langle d, y \rangle$ tale che y è una dimostrazione di $A(d)$ dove $d \in D$.*

2.2 Alcune funzioni ricorsive primitive

Definiamo alcune importanti funzioni ricorsive primitive:

- *Funzione costante:* per m fissato la funzione costante $f \in \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ è definita da $f(\vec{x}) = m$.

- *Addizione*: la funzione ricorsiva somma è definita da
$$\begin{cases} x + 0 = x \\ x + Sy = S(x + y) \end{cases}$$
- *Moltiplicazione*: la funzione ricorsiva prodotto è definita da
$$\begin{cases} x \cdot 0 = 0 \\ x \cdot Sy = x \cdot y + x \end{cases}$$
- *Esponenziazione*: la funzione esponenziale è definita come segue
$$\begin{cases} x^0 = 1 \\ x^{Sy} = x^y \cdot x \end{cases}$$
- *Predecessore*:
$$\begin{cases} prd(0) = 0 \\ prd(Sx) = x \end{cases}$$
- *Sottrazione tagliata*:
$$\begin{cases} x \dot{-} 0 = x \\ x \dot{-} Sy = prd(x \dot{-} y) \end{cases}$$

Notiamo che $x \dot{-} y = 0$ se e solo se $x \leq y$, altrimenti $x \dot{-} y = x - y$; cioè se $x \geq y$ allora $y + (x \dot{-} y) = x$.

2.3 Funzioni coppia

La *funzione coppia* è una funzione che associa ad ogni coppia ordinata di numeri naturali un numero naturale.

Definizione 2.2 Una *funzione coppia* j è una mappa da \mathbb{N}^2 in \mathbb{N} con inverse j_1 e j_2 tali che $j_1 j(x, y) = x$ e $j_2 j(x, y) = y$.

Esistono molte possibili scelte per j . Una conveniente funzione coppia è la seguente.

Definizione 2.3

$$\begin{aligned} j(x, y) &:= 2^x \cdot (2y + 1) \dot{-} 1 \\ j_1 z &:= \min_{x \leq z} [\exists y \leq z | (2^x \cdot (2y + 1) = Sz)] \\ j_2 z &:= \min_{y \leq z} [\exists x \leq z | (2^x \cdot (2y + 1) = Sz)] \end{aligned}$$

Esempio 2.4 Cerchiamo un numero naturale z tale che $z = j(3, 7)$.

$$j(3, 7) = 2^3 \cdot (2 \cdot 7 + 1) \dot{-} 1 = 8 \cdot (15) \dot{-} 1 = 120 \dot{-} 1 = 119.$$

□

Esempio 2.5 Cerchiamo una coppia di numeri x e y tali che $j(x, y) = 21$.

$$j_1 21 = \min_{x \leq 21} [\exists y \leq 21 | 2^x (2y + 1) = 22]$$

$$j_2 21 = \min_{y \leq 21} [\exists x \leq 21 | 2^x (2y + 1) = 22]$$

Se $x = 0$ allora $y = \frac{21}{2}$ che non è un numero naturale. Mentre se $x = 1$ abbiamo che $y = 5$.

Quindi $j(x, y) = (1, 5)$

□

Un'altra ben conosciuta funzione coppia è questa.

Definizione 2.6

$$j'(x, y) := \frac{1}{2}(x + y)(x + y + 1) + y$$

$$j'_1 z := \tilde{f}(z) - j'_2 z$$

$$j'_2 z := z - f(\tilde{f}(z))$$

$$\text{dove } f(z) := \frac{(z+1)z}{2} \text{ e } \tilde{f}(z) := \max\{m \mid f(m) \leq z\}$$

2.4 T-predicato di Kleene

Capitolo 3

Definizione e proprietà della realizzabilità

3.1 Introduzione

L'idea di realizzabilità fu introdotta per la prima volta da Kleene nel 1945 nella "*Paper on Realizability*" come un metodo sistematico di fare il concetto costruttivo di frasi aritmetiche esplicito. Il punto di partenza di Kleene fu che un'affermazione esistenziale $B \equiv \exists x.A(x_1, \dots, x_n, x)$ è un'affermazione incompleta: si può affermare B solo se x può essere prodotto (dipendendo dai parametri x_1, \dots, x_n). Similmente, si deve essere in grado di decidere tra le disgiunti al fine di affermare una disgiunzione. Possiamo vedere la definizione di Kleene come un modo di fare la BHK-interpretation precisa. La nozione informale di operazione costruttiva è rimpiazzata dalla nozione precisa di Church-Turing. Per fare in modo che quest'idea funzioni le dimostrazioni sono rimpiazzate da numeri naturali sfruttando l'esistenza di funzioni *pair* definibili su \mathbb{N} .

Nella forma in cui è data da Kleene la realizzabilità è paragonabile alla nozione classica di verità: essa interpreta affermazioni di aritmetica in destinate strutture $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, 0, s, +, *, \dots)$ dei numeri naturali. Usiamo n, m, \dots per elementi arbitrari di \mathbb{N} e siano \bar{n}, \bar{m}, \dots i corrispondenti numeri nel linguaggio dell'aritmetica. Allora " n realizza A " è definita per induzione sulla complessità di A dove n è un numero ereditariamente codificato dalle seguenti clausole:

1. n realizza $(t=s)$ se e solo se $t=s$ vale in N
2. n realizza $A \wedge B$ se e solo se $j_1 n$ realizza A e $j_2 n$ realizza B
3. n realizza $A \vee B$ se e solo se $j_1 n = 0$ e $j_2 n$ realizza A o $j_1 n \neq 0$ e $j_2 n$ realizza B
4. n realizza $A \rightarrow B$ se e solo se per ogni m che realizza A , $\{n\}(m)$ è definito e realizza B
5. n realizza $\exists x.A(x)$ se e solo se $j_2 n$ realizza $A[x/\bar{j_1 n}]$
6. n realizza $\forall x.A(x)$ se e solo se per tutti gli m , $\{n\}(m)$ è definita e realizza $A(\bar{m})$

dove j_1n e j_2n sono le proiezioni di alcune funzioni coppia $< \cdot, \cdot >: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ (cioè $< j_1n, j_2n > = n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$).

Possiamo notare che queste clausole sono abbastanza simili a quelle della *BHK – interpretation* ma più specifiche nel senso che i testimoni sono legati a dei numeri naturali e applicazioni di testimoni sono date da parentesi di Kleene. Quindi leggendo questa nozione in termini di *BHK – interpretation*, cioè numero realizzabile sta per dimostrazione e operazione parzialmente ricorsiva sta per costruzione, allora la realizzabilità appare come un variante della *BHK – interpretation*.

3.2 Definizione realizzabilità

Al posto di lavorare con la versione semantica data sopra, è più vantaggioso riformulare la realizzabilità sintatticamente assegnando una formula xrA di HA ad ogni formula A di HA, dove $x \notin FV(A)$ di HA. Abbiamo quindi la seguente:

Definizione 3.1 xrA è definita induttivamente dalle seguenti clausole, dove $x \notin FV(A)$:

1. $xr[t = s] := [t = s]$
2. $xr(A \wedge B) := j_1xrA \wedge j_2xrB$
3. $xr(A \vee B) := (j_1x = 0 \wedge j_2xrA) \vee (j_1x \neq 0 \wedge j_2xrB)$
4. $xr(A \rightarrow B) := \forall y(yrA \rightarrow \exists u(T_{xyu} \wedge U_urB))$ con $u \notin FV(B)$
5. $xr\forall y.A := \forall y\exists u(T_{xyu} \wedge U_urA)$
6. $xr\exists y.A := j_2xrA[y/j_1x]$

dove, come sopra, j_1n e j_2n sono le proiezioni di alcune funzioni coppia e T è il T -predicate di Kleene.

Facciamo ora alcuni esempi per capire meglio la definizione di realizzabilità.

Esempio 3.2 Cerchiamo un realizzatore per $\exists x.x > 5$. Quindi $nr\exists x.x > 5 \equiv j_1nr x > 5[x/j_1n] \equiv j_2nr j_1n > 5$. Se consideriamo come funzione coppia la funzione definita in 2.3 $n = 2^{j_1n}(2j_2n + 1) \dot{-} 1$ dove

$$j_1n = \min_{j_1n \leq z} [\exists j_2n \leq z(2^{j_1n}(2j_2n + 1) = S_z)] \text{ e } j_2n = \min_{j_2n \leq z} [\exists j_1n \leq z(2^{j_1n}(2j_2n + 1) = S_z)]$$

Quindi j_1n deve essere maggiore di 5 e uguale al minimo di $S_z = 2^z(2j_2n + 1)$; cioè $j_1n = 6$. Mentre j_2n deve essere uguale al minimo di $S_z = 2^{j_1n}(2z + 1) = 2^6(2z + 1) = 64(2z + 1)$; cioè $j_2n = 0$.

Allora $m = 2^6(1) \dot{-} 1 = 64 \dot{-} 1 = 63$ e quindi $63r\exists x.x > 5$.

□

Esempio 3.3 Cerchiamo un realizzatore per la seguente legge di assorbimento valida in HA $A \rightarrow A \wedge (A \vee B)$.

Supponiamo che urA . Allora $j(0, u)rA \vee B$ e quindi $j(u, j(0, u))rA \wedge (A \vee B)$. Di conseguenza $\bigwedge u. j(u, j(0, u))rA \rightarrow A \wedge (A \vee B)$.

□

Esempio 3.4 Cerchiamo un realizzatore per le proprietà commutative valide in HA:

$A \wedge B \rightarrow B \wedge A$ e $A \vee B \rightarrow B \vee A$.

Supponiamo che $urA \wedge B$. Allora J_1urA e j_2urB e quindi $j(j_2u, j_1u)rB \wedge A$. Di conseguenza $\bigwedge u. j(j_2u, j_1u)rA \wedge B \rightarrow B \wedge A$.

Per quanto riguarda l'altra supponiamo ora che $urA \vee B$. Abbiamo quindi che $(j_1w = 0 \wedge j_2wrA) \vee (j_1w \neq 0 \wedge j_2wrB)$ e quindi $j(j_1u, j_2u)rB \vee A$. Allora $\bigwedge u. j(j_1u, j_2u)rA \vee B \rightarrow B \vee A$.

□

Osservazione 3.5 In una notazione più informale con "parentesi di Kleene" 4. e 5. possono essere scritte così:

$$4.' \quad xr(A \rightarrow B) := \forall y(yrA \rightarrow E\{x\}(y) \wedge \{x\}(y)rB)$$

$$5.' \quad xr\forall yA := \forall y(E\{x\}(y) \wedge \{x\}(y)rA)$$

Osservazione 3.6 La clausola 3. è equivalente a:

$$xr(A \vee B) := (j_1x = 0 \rightarrow j_2xrA) \vee (j_1x \neq 0 \rightarrow j_2xrB)$$

Osservazione 3.7 Dato che in HA $\neg A \equiv A \rightarrow \perp$ possiamo notare che $xr\neg A \leftrightarrow \forall y(yrA \rightarrow \{x\}(y)r(0 = 1))$ e quindi $xr\neg A \leftrightarrow \forall y(\neg yrA)$. Cioè una negazione è realizzabile da alcuni numeri se e solo se essa è realizzabile da tutti i numeri.

$$\text{Inoltre } xr\neg\neg A \leftrightarrow \forall y(\neg yr\neg A) \leftrightarrow \neg\exists y(yr\neg A) \leftrightarrow \neg\exists y\forall z(\neg zrA) \leftrightarrow \neg\neg\exists z(zrA).$$

Diamo ora un esempio di formula non realizzabile.

Esempio 3.8 Un esempio di formula valida classicamente che non è realizzabile è il *Principio del terzo escluso* $A \vee \neg A$.

Supponiamo per assurdo che $urA \vee \neg A$. Allora

$urA \vee \neg A \equiv (j_1u = 0 \wedge j_2urA) \vee (j_1u \neq 0 \wedge j_2ur\neg A)$. Prendiamo $A = \forall x.\{x\}(x) \downarrow \vee \neg\{x\}(x) \downarrow$ con $\{x\}(y) \downarrow = \exists z.T(x, y, z)$ dove T è il T -predicato di Kleene. Se n fosse un realizzatore per A allora

Con questa nuova definizione di realizzabilità possiamo dimostrare che il Principio di Markov è realizzabile.

Definizione 3.9 Il Principio di Markov è dato dal seguente schema:

$$MP \quad \forall x(Ax \vee \neg Ax) \wedge \neg\neg\exists x.Ax \rightarrow \exists x.Ax$$

Teorema 3.10 MP è realizzabile.

Dimostrazione Sia F un'istanza di MP , cioè $F \equiv \forall x(Ax \vee \neg Ax) \wedge \neg \neg \exists x.Ax \rightarrow \exists x.Ax$ e assumiamo per semplicità che A non contenga variabili libere in x . Supponiamo che $ur\forall x(Ax \vee \neg Ax) \wedge \neg \neg \exists x.Ax$. Allora
 $ur\forall x(Ax \vee \neg Ax) \wedge \neg \neg \exists x.Ax \equiv j_1 ur\forall x(Ax \vee \neg Ax) \wedge j_2 ur\neg \neg \exists x.Ax \equiv$
 $\forall x(e\{j_1 u\}(x) \wedge ([j_1\{j_1 u\}(x)) = 0 \wedge j_2(\{j_1 u\}(x))rAx] \vee [j_1(\{j_1 u\}(x)) \neq 0 \wedge j_2(\{j_1 u\}(x))r\neg Ax])$
 $\wedge j_2 ur\neg \neg \exists x.Ax$.
Sia $\varphi(u) \simeq \min_x[j_1(\{j_1 u\}(x)) \cong 0]$. Allora $\forall x(j_1\{j_1 u\}(x) \neq 0)$ dovrebbe implicare
 $\forall x.\exists w(ur\neg Ax)$ che è equivalente a $\forall x.\forall u.\neg(urAx)$, cioè $\forall x.\neg \exists u(urAx)$. D'altra parte,
 $j_2 ur\neg \neg \exists x.Ax \leftrightarrow \neg \neg \exists x.\exists w(urAx) \leftrightarrow \neg \forall x.\neg \exists w(urAx)$ (per l'osservazione 3.7). Abbiamo
quindi una contraddizione visto che valgono contemporaneamente $\forall x.\neg \exists u(urAx)$ e
 $\neg(\forall x.\neg \exists w(urAx))$. Di conseguenza si ha che $\neg \forall x(j_1\{j_1 u\}(x) \neq 0)$, cioè $\neg \neg \exists x.\exists v(T_{(j_1 u, x, v)} \wedge$
 $j_1 U_v = 0)$ e quindi $\exists x[j_1\{j_1 u\}(x) = 0]$. Abbiamo quindi che $E_{\varphi(u)}$ e
 $j(\varphi(u), j_2\{j_1 u\}(\varphi(u)))r\exists x.Ax$ e così $\wedge u.j(\varphi(u), j_2\{j_1 u\}(\varphi(u)))rF$.

□

3.3 Proprietà della realizzabilità

Ci piacerebbe poter provare che quando A è dimostrabile allora esiste un numero naturale n tale che nrA è anch'essa dimostrabile. Sicuramente, quest'affermazione dipende da cosa si intende per dimostrabile. Con il proposito di fare la definizione di dimostrabile precisa si considera generalmente il sistema formale HA (aritmetica di Heyting) e sue estensioni. Il linguaggio del primo ordine di HA consiste di simboli per ogni (definizione di una) funzione ricorsiva primitiva. Quindi, in particolare, abbiamo una costante 0 e una funzione unitaria $succ$ per l'operazione di successore. Per ogni numero naturale n c'è un termine $succ^n(0)$, il numero per n , il quale per motivi di leggibilità denotiamo anche con n . HA è basata sulla logica costruttiva o intuizionista. Gli assiomi non logici di HA (oltre all'usuale assioma d'uguaglianza) sono:

1. equazioni per definire funzioni primitive ricorsive
2. SCHEMA D'INDUZIONE $A(0) \wedge \forall x A(x) \rightarrow A(succ(x)) \rightarrow \forall x.A(x)$
3. $\neg 0 = succ(x)$

Nello schema d'induzione A può essere sostituita con un predicato arbitrario esprimibile nel linguaggio di HA ; mentre il terzo assioma è necessario per escludere che tutti i numeri siano uguali.

Diamo quindi la seguente definizione che servirà per formulare le proprietà della realizzabilità.

Definizione 3.11 Una formula A di $\mathcal{L}(HA)$ è *quasi negativa* o *essenzialmente \exists -libera* se e solo se A non contiene \vee e \exists solo immediatamente di fronte alle prime formule. In altre parole, A è quasi negativa se e solo se è costituita da formule prime e da formule prime quantificate esistenzialmente mediante \wedge , \rightarrow , \forall .

Per una formula essenzialmente \exists -libera φ non ci sono informazioni non banali sulla realizzazione di \exists e \forall . Infatti φ è vera se e solo se è realizzabile, e se φ è realizzabile allora può essere realizzata da un termine canonico che dipende solamente da φ . Questo è il contenuto della seguente proposizione:

Proposizione 3.12 *Sia $A(\vec{x})$ essenzialmente \exists -libera con $FV(A) \subset \vec{x}$. Allora c'è un termine ψ_A con parentesi di Kleene contenente al massimo \vec{x} libera tale che*

1. $HA \vdash \exists y(yrA) \rightarrow A$
2. $HA \vdash A \rightarrow E_{\psi_A} \wedge \psi_A rA$

Dimostrazione Notiamo che ψ_A è costruita per induzione sulla complessità di A . Definiamo quindi ψ_A :

- $\psi_{t=s} := 0$
- $\psi_{\exists y(t=s)} := j(\min_y[t=s], 0)$
- $\psi_{B \wedge C} := j(\psi_B, \psi_C)$
- $\psi_{B \rightarrow C} := \bigwedge y.\psi_C$ con $y \notin FV(C)$
- $\psi_{\forall y.B} := \bigwedge y.\psi_{B(y)}$

dove $\bigwedge y.t$ per un termine t con parentesi di Kleene indica un indice deciso canonicamente per la funzione parziale ricorsiva $\lambda y.t$.

Possiamo quindi dimostrare la proposizione simultaneamente per induzione sulla complessità di A .

- per formule primitive $t=s$ abbiamo che:
 1. TESI: $HA \vdash \exists y(yrt = s) \rightarrow t = s$
Supponiamo che $\exists y(yrt = s)$ valga. Allora per la definizione di realizzabilità $\exists y(yrt = s) \rightarrow \exists y.t = s \rightarrow t = s$ se y non è libera in $t=s$.
 2. TESI: $HA \vdash t = s \rightarrow E_{\psi_{t=s}} \wedge \psi_{t=s} r t = s$
Supponiamo che $t = s$ valga. Allora $t = s \rightarrow 0 r t = s$ per la definizione di realizzabilità. Basta quindi porre $\psi_{t=s} := 0$ per ottenere $\psi_{t=s} r t = s$ e quindi la tesi.
- per formule della forma $\exists y.t = s$ abbiamo che:
 1. TESI: $HA \vdash \exists x(xr\exists y.t = s) \rightarrow \exists y.t = s$
Supponiamo che $\exists x(xr\exists y.t = s)$ valga. Per la definizione di realizzabilità $\exists x(xr\exists y.t = s) \rightarrow \exists x(j_2 x r t = s[y/j_1 x]) \rightarrow \exists y.t = s$.

2. TESI: $HA \vdash \exists y.t = s \rightarrow E_{\psi_{\exists y(t=s)}} \wedge \psi_{\exists y(t=s)} r \exists y.t = s$
 con $\psi_{\exists y(t=s)} := j(\min_y[t = s], 0)$
 Supponiamo che $\exists y.t = s$ valga. Allora $\exists y.t = s \rightarrow t = s[y/\min_y[t = s]]$. Ma per la definizione di realizzabilità
 $t = s[y/\min_y[t = s]] \rightarrow 0rt = s[y/\min_y[t = s]] \rightarrow$
 $j_2 j(\min_y[t = s], 0)rt = s[y/j_1 j(\min_y[t = s], 0)] \rightarrow$
 $j(\min_y[t = s], 0)r \exists y.t = s \rightarrow \psi_{\exists y(t=s)} r \exists y.t = s$. Abbiamo così la tesi.

Supponiamo per ipotesi induttiva che le formule essenzialmente \exists -libera B e C soddisfano 1. e 2., cioè:

$HA \vdash \exists y(yrB) \rightarrow B$ e $HA \vdash B \rightarrow E_{\psi_B} \wedge \psi_B r B$
 $HA \vdash \exists y(yrC) \rightarrow C$ e $HA \vdash C \rightarrow E_{\psi_C} \wedge \psi_C r C$.

- Per $A \equiv B \wedge C$:

1. IPOTESI INDUTTIVA: $HA \vdash \exists y(yrB) \rightarrow B$
 $HA \vdash \exists y(yrC) \rightarrow C$
 TESI: $HA \vdash \exists y(yrB \wedge C) \rightarrow B \wedge C$
 Supponiamo che $\exists y(yrB \wedge C)$ valga. Allora per la definizione di realizzabilità
 $\exists y(yrB \wedge C) \rightarrow \exists y(j_1 yrB \wedge j_2 yrC)$. Inoltre in HA sappiamo che
 $\exists x(A \wedge B) \equiv \exists x.A \wedge \exists x.B$. Quindi $\exists y(j_1 yrB \wedge j_2 yrC) \rightarrow \exists y(j_1 yrB) \wedge \exists y(j_2 yrC)$.
 Ma per ipotesi induttiva $\exists y(j_1 yrB) \wedge \exists y(j_2 yrC) \rightarrow B \wedge C$ e si ha quindi la tesi.
2. IPOTESI INDUTTIVA: $HA \vdash B \rightarrow E_{\psi_B} \wedge \psi_B r B$
 $HA \vdash C \rightarrow E_{\psi_C} \wedge \psi_C r C$
 TESI: $HA \vdash B \wedge C \rightarrow E_{\psi_{B \wedge C}} \wedge \psi_{B \wedge C} r B \wedge C$ con $\psi_{B \wedge C} := j(\psi_B, \psi_C)$
 Supponiamo che valga $B \wedge C$. Allora per ipotesi induttiva
 $B \wedge C \rightarrow (E_{\psi_B} \wedge \psi_B r B) \wedge (E_{\psi_C} \wedge \psi_C r C) \rightarrow E_{\psi_B} \wedge E_{\psi_C} \wedge \psi_B r B \wedge \psi_C r C \rightarrow$
 $E_{\psi_B} \wedge E_{\psi_C} \wedge (j_1 j(\psi_B, \psi_C) r B \wedge j_2 j(\psi_B, \psi_C) r C)$. Ma per la definizione di realizzabilità
 $E_{\psi_B} \wedge E_{\psi_C} \wedge (j_1 j(\psi_B, \psi_C) r B \wedge j_2 j(\psi_B, \psi_C) r C) \rightarrow$
 $E_{\psi_B} \wedge E_{\psi_C} \wedge j(\psi_B, \psi_C) r B \wedge C \rightarrow E_{\psi_{B \wedge C}} \wedge \psi_{B \wedge C} r B \wedge C$
 che è quello che volevamo dimostrare.

- Per $A \equiv B \rightarrow C$:

1. IPOTESI INDUTTIVA: $HA \vdash B \rightarrow E_{\psi_B} \wedge \psi_B r B$
 $HA \vdash \exists y(yrC) \rightarrow C$
 TESI: $HA \vdash xr(B \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C)$
 Supponiamo che $xr(B \rightarrow C)$ valga, cioè che $\forall y(yrB \rightarrow E\{x\}(y) \wedge \{x\}(y) r C)$. Per ipotesi induttiva $B \rightarrow E_{\psi_B} \wedge \psi_B r B$. Allora $B \rightarrow E\{x\}(\psi_B) \wedge \{x\}(\psi_B) r C$. Ma per ipotesi induttiva vale anche che $zrC \rightarrow C$. Di conseguenza $B \rightarrow E\{x\}(\psi_B) \wedge C$ e quindi $B \rightarrow C$. Da cui la tesi.
2. IPOTESI INDUTTIVA: $HA \vdash \exists y(yrB) \rightarrow B$
 $HA \vdash C \rightarrow E_{\psi_C} \wedge \psi_C r C$
 TESI: $HA \vdash (C \rightarrow B) \rightarrow E_{\psi_{B \rightarrow C}} \wedge \psi_{B \rightarrow C} r (B \rightarrow C)$ con $\psi_{B \rightarrow C} := \bigwedge y.\psi_B$
 Supponiamo che $B \rightarrow C$ valga. Allora per ipotesi induttiva $yrB \rightarrow B$ e dato che

avevamo supposto che $B \rightarrow C$ allora $yrB \rightarrow B \rightarrow C$. Ma per la seconda ipotesi induttiva $C \rightarrow E_{\psi_C} \wedge \psi_C rC \rightarrow \forall y(E_{\psi_C} \wedge \psi_C rC) \rightarrow \forall y(E\{\wedge y.\psi_C\}(y) \wedge \{\wedge y.\psi_C\}(y)rC)$. Quindi $yrB \rightarrow \forall y(E\{\wedge y.\psi_C\}(y) \wedge \{\wedge y.\psi_C\}(y)rC) \rightarrow \wedge y.\psi_C r(B \rightarrow C) \rightarrow \psi_{B \rightarrow C} r(B \rightarrow C)$ da cui la tesi.

- Per $A \equiv \forall x.B$:

1. IPOTESI INDUTTIVA: $HA \vdash \exists y(yrB) \rightarrow B$

TESI: $HA \vdash \exists y(yr\forall x.B) \rightarrow \forall x.B$

Supponiamo che $yr\forall x.B$ valga, cioè $\forall x(E\{y\}(x) \wedge \{y\}(x)rB)$. Dato che per ipotesi induttiva $yrB \rightarrow B$ allora $\forall x(E\{y\}(x) \wedge \{y\}(x)rB) \rightarrow \forall x(E\{y\}(x) \wedge B) \rightarrow \forall x.B$ da cui la tesi.

2. IPOTESI INDUTTIVA: $HA \vdash B \rightarrow E_{\psi_B} \wedge \psi_B rB$

TESI: $HA \vdash \forall x.B \rightarrow E_{\psi_{\forall x.B}} \wedge \psi_{\forall x.B} r\forall x.B$ con $\psi_{\forall x.B} := \wedge y.\psi_{B(y)}$

Supponiamo che $\forall x.B$ valga. Allora per ipotesi induttiva

$\forall x.B \rightarrow \forall x(E_{\psi_B} \wedge \psi_B rB) \rightarrow \forall x(E\{\wedge x.\psi_B(x)\}(x) \wedge \{\wedge x.\psi_B(x)\}(x)rB) \rightarrow \wedge x.\psi_B(x)r\forall x.B \rightarrow \psi_{\forall x.B} r\forall x.B$ da cui si ha la tesi.

□

Osservazione 3.13 *A causa delle proprietà 1. e 2. della proposizione precedente, le formule quasi negative sono a volte chiamate "auto realizzanti"*

Lemma 3.14 *Per ogni formula A:*

1. xrA è equivalente a una formula quasi negativa
2. $(trA)[x/s] \equiv t[x/s]rA[x/s]$

Dimostrazione

1. Procediamo per induzione sulla complessità della formula A:

- per formule primitive $t=s$ abbiamo che $xrt = s \leftrightarrow [t = s]$ la quale è una formula quasi negativa.
- per $A \equiv B \wedge C$:
 IPOTESI INDUTTIVA: yrB è equivalente a una formula quasi negativa
 yrC è equivalente a una formula quasi negativa
 TESI: $xrB \wedge C$ è equivalente a una formula quasi negativa
 Supponiamo che $xrB \wedge C$ valga. Allora per la definizione di realizzabilità $xrB \wedge C \leftrightarrow j_1 xrB \wedge j_2 xrC$. Ma per ipotesi induttiva yrB e yrC sono equivalenti a formule quasi negative da cui segue la tesi.
- per $A \equiv B \vee C$:
 IPOTESI INDUTTIVA: yrB è equivalente a una formula quasi negativa
 yrC è equivalente a una formula quasi negativa

TESI: $xrB \vee C$ è equivalente a una formula quasi negativa

Supponiamo che $xrB \vee C$ valga. Allora per la definizione di realizzabilità

$xrB \vee C \leftrightarrow (j_1x = 0 \wedge j_2xrB) \vee (j_1x \neq 0 \wedge j_2xrC)$. Ma per ipotesi induttiva yrB e yrC sono equivalenti a formule quasi negative, mentre $j_1x = 0$ e $j_1x \neq 0$ sono equivalenti a formule quasi negative per il caso precedente. Si ha così la tesi.

- per $A \equiv B \rightarrow C$:

IPOTESI INDUTTIVA: yrB è equivalente a una formula quasi negativa

yrC è equivalente a una formula quasi negativa

TESI: $xrB \rightarrow C$ è equivalente a una formula quasi negativa

Supponiamo che $xrB \rightarrow C$ valga. Allora per la definizione di realizzabilità $xrB \rightarrow C \leftrightarrow \forall y(yrB \rightarrow \exists z(T_{xyz} \wedge U_zrC))$. Inoltre in HA vale che

$\exists z(A \wedge B) \equiv \exists z(A \wedge \forall u(A \rightarrow B))$ con $u \notin FV(B)$. Quindi

$\forall y(yrB \rightarrow \exists z(T_{xyz} \wedge U_zrC) \leftrightarrow \forall y(yrB \rightarrow (\exists z.T_{xyz} \wedge \forall u(T_{xyu} \wedge U_urC)))$ con $u \notin FV(C)$. Quest'ultima è equivalente a una formula quasi negativa dato che per ipotesi induttiva yrB e U_urC sono equivalenti a formule quasi negative e $\exists z.T_{xyz}$ può essere espressa con $\exists z(\chi_T(x, y, z) = 0)$ dove χ_T è la funzione caratteristica di T. Abbiamo così ottenuto la tesi.

- per $A \equiv \forall x.B$:

IPOTESI INDUTTIVA: yrB è equivalente a una formula quasi negativa

TESI: $xr\forall y.B$ è equivalente a una formula quasi negativa

Supponiamo che $xr\forall y.B$. Allora per la definizione di realizzabilità e per quanto visto nel caso precedente $xr\forall y.B \leftrightarrow \forall y.\exists z(T_{xyz} \wedge U_zrB) \leftrightarrow$

$\forall y(\exists z.T_{xyz} \wedge \forall u(T_{xyu} \wedge U_urB))$. Quest'ultima è equivalente a una formula quasi negativa dato che per ipotesi induttiva U_urB è equivalente a una formula quasi negativa e $\exists z.T_{xyz}$ può essere espressa con $\exists z(\chi_T(x, y, z) = 0)$ dove χ_T è la funzione caratteristica di T. Segue così la tesi.

- per $A \equiv \exists x.B$:

IPOTESI INDUTTIVA: yrB è equivalente a una formula quasi negativa:

TESI: $xr\exists y.B$ è equivalente a una formula quasi negativa

Supponiamo che $xr\exists y.B$ valga. Allora per la definizione di realizzabilità

$xr\exists y.B \leftrightarrow j_2xrB[y/j_1x]$ che per ipotesi induttiva è equivalente a una formula quasi negativa.

2. Procediamo per induzione sulla complessità della formula A:

- per formule primitive $t=s$ abbiamo che $vr[t = s][x/s] \equiv [t = s][x/s] \equiv t[x/s] = s[x/s] \equiv v[x/s]r[t = s][x/s]$

- per $A \equiv B \wedge C$:

IPOTESI INDUTTIVA: $(trB)[x/s] \equiv t[x/s]rB[x/s]$

$(trC)[x/s] \equiv t[x/s]rC[x/s]$

TESI: $(trB \wedge C)[x/s] \equiv t[x/s]r(B \wedge C)[x/s]$

$(trB \wedge C)[x/s] \equiv (j_1trB \wedge j_2trC)[x/s] \equiv (j_1trB)[x/s] \wedge (j_2trC)[x/s] \equiv$

$(j_1t[x/s]rB[x/s]) \wedge (j_2t[x/s]rC[x/s]) \equiv t[x/s]r(B \wedge C)[x/s]$

- per $A \equiv B \vee C$:
 IPOTESI INDUTTIVA: $(trB)[x/s] \equiv t[x/s]rB[x/s]$
 $(trC)[x/s] \equiv t[x/s]rC[x/s]$
 TESI: $(trB \vee C)[x/s] \equiv t[x/s]r(B \vee C)[x/s]$
 $(trB \vee C)[x/s] \equiv ((j_1t = 0 \wedge j_2trB) \vee (j_1t \neq 0 \wedge j_2trC))[x/s] \equiv$
 $(j_1t = 0 \wedge j_2trB)[x/s] \vee (j_1t \neq 0 \wedge j_2trC)[x/s] \equiv$
 $((j_1t = 0)[x/s] \wedge (j_2trB)[x/s]) \vee ((j_1t \neq 0)[x/s] \wedge (j_2trC)[x/s]) \equiv$
 $(j_1t[x/s] = 0[x/s] \wedge j_2t[x/s]rB[x/s]) \vee (j_1t[x/s] \neq 0[x/s] \wedge j_2t[x/s]rC[x/s]) \equiv$
 $(j_1t[x/s] = 0 \wedge j_2t[x/s]rB[x/s]) \vee (j_1t[x/s] \neq 0 \wedge j_2t[x/s]rC[x/s]) \equiv$
 $t[x/s]r(B[x/s] \vee C[x/s]) \equiv t[x/s]r(B \vee C)[x/s]$
- per $A \equiv B \rightarrow C$:
 IPOTESI INDUTTIVA: $(trB)[x/s] \equiv t[x/s]rB[x/s]$
 $(trC)[x/s] \equiv t[x/s]rC[x/s]$
 TESI: $(trB \rightarrow C)[x/s] \equiv t[x/s]r(B \rightarrow C)[x/s]$
 $(trB \rightarrow C)[x/s] \equiv (\forall y(yrB \rightarrow \exists u(T_{tyu} \wedge U_u rC)))[x/s] \equiv$
 $\forall y((yrB \rightarrow \exists u(T_{tyu} \wedge U_u rC))[x/s]) \equiv$
 $\forall y((yrB)[x/s] \rightarrow (\exists u(T_{tyu} \wedge U_u rC))[x/s]) \equiv$
 $\forall y((yrB)[x/s] \rightarrow \exists u((T_{tyu} \wedge U_u rC)[x/s])) \equiv$
 $\forall y((yrB)[x/s] \rightarrow \exists u(T_{tyu}[x/s] \wedge (U_u rC)[x/s])) \equiv$
 $\forall y(y[x/s]rB[x/s] \rightarrow \exists u(T_{tyu}[x/s] \wedge U_u[x/s]rC[x/s])) \equiv$
 $\forall y(yrB[x/s] \rightarrow \exists u(T_{tyu} \wedge U_u rC[x/s])) \equiv$
 $t[x/s]rB[x/s] \rightarrow C[x/s] \equiv t[x/s]r(B \rightarrow C)[x/s]$
- per $A \equiv \forall x.B$:
 IPOTESI INDUTTIVA: $(trB)[x/s] \equiv t[x/s]rB[x/s]$
 TESI: $(tr\forall y.B)[x/s] \equiv t[x/s]r(\forall y.B)[x/s]$
 $(tr\forall y.B)[x/s] \equiv (\forall y.\exists u(T_{tyu} \wedge U_u rB))[x/s] \equiv$
 $\equiv \forall y(\exists u(T_{tyu} \wedge U_u rB)[x/s]) \equiv \forall y.\exists u((T_{tyu} \wedge U_u rB)[x/B]) \equiv$
 $\equiv \forall y\exists u(T_{tyu}[x/s] \wedge (U_u rB)[x/s]) \equiv$
 $\equiv \forall y\exists u(T_{tyu}[x/s] \wedge U_u[x/s]rB[x/s]) \equiv$
 $\equiv \forall y\exists u(T_{tyu}[x/s] \wedge U_u rB[x/s]) \equiv t[x/s]r\forall y.(B[x/s]) \equiv$
 $\equiv t[x/s]r(\forall y.B)[x/s]$
- per $A \equiv \exists x.B$:
 IPOTESI INDUTTIVA: $(trB)[x/s] \equiv t[x/s]rB[x/s]$
 TESI: $(tr\exists y.B)[x/s] \equiv t[x/s]r(\exists y.B)[x/s]$
 $(tr\exists y.B)[x/s] \equiv (j_2trB(y/j_1t))[x/s] \equiv j_2t[x/s]r(B[y/j_1t])[x/s] \equiv$
 $\equiv t[x/s]r\exists y.B[x/s] \equiv t[x/s]r(\exists y.B)[x/s]$

□

Osservazione 3.15 Con il lemma precedente possiamo concludere che le proprietà 1. e 2. della proposizione 3.12 caratterizzano le formule quasi negative.

Proposizione 3.16 (Idempotenza della realizzabilità)

$$HA \vdash \exists x(xr\exists y(yrA)) \leftrightarrow \exists y(yrA)$$

Dimostrazione

" \rightarrow ": Supponiamo che $xr\exists y(yrA)$ valga. Allora per la definizione di realizzabilità $xr\exists y(yrA) \rightarrow j_2xr(yrA)[y/j_1x] \rightarrow j_2xr(j_1xrA)$. Ma per la proposizione 3.12 punto 1. abbiamo che $j_2xr(j_1xrA) \rightarrow j_1xrA$ cioè $\exists x(xrA)$ (perchè j_1xrA vuol dire che esiste un elemento che realizza A).

" \leftarrow ": Supponiamo che $\exists y(yrA)$ valga. Allora per il lemma 3.14 yrA è quasi negativa. Ma per la proposizione 3.12 punto 2. abbiamo che $yrA \rightarrow (\psi_{(yrA)}r(yrA) \wedge E_{\psi_{(yrA)}}) \rightarrow (\psi_{(yrA)}r(yrA)[y/y] \wedge E_{\psi_{(yrA)}} \rightarrow j_2j(y, \psi_{(yrA)})r(yrA)[y/j_1j(y, \psi_{(yrA)})] \wedge E_{\psi_{(yrA)}} \rightarrow j(y, \psi_{(yrA)})r\exists y(yrA) \wedge E_{j(y, \psi_{(yrA)})}$ e quindi $\exists x(xr\exists y(yrA))$.

□

Capitolo 4

Conseguenze della realizzabilità

4.1 Teorema di caratterizzazione della realizzabilità

Si potrebbe sperare che per ogni formula A si possa provare in HA l'equivalenza $A \leftrightarrow \exists x.xrA$ o almeno che $HA \vdash A$ se e solo se $HA \vdash \exists x.xrA$. Questa speranza è vana perchè per CT_0 (cioè $(\forall x.\exists y.A(x, y)) \rightarrow \exists e.\forall x.A(x, \{e\}(x))$) abbiamo che $HA \vdash \exists x.xrCT_0$ ma CT_0 non può essere provata in HA poichè per alcune istanze di CT_0 la sua negazione può essere provata in PA . Tuttavia con la seguente definizione che modifica CT_0 possiamo ottenere quello che vogliamo.

Definizione 4.1 *La tesi estesa di Church è data dal seguente schema dove A è quasi negativa:*

$$ECT_0 \quad \forall x(Ax \rightarrow \exists y.Bxy) \rightarrow \exists z.\forall x(Ax \rightarrow \exists u(T_{z xu} \wedge B(x, U_u)))$$

Lemma 4.2 *Per qualsiasi istanza F di ECT_0 c'è un termine t tale che $HA \vdash E_t \wedge trF$.*

Dimostrazione Sia $F \equiv \forall x[A \rightarrow \exists y.By] \rightarrow \exists z.\forall x[A \rightarrow \exists u(T_{z xu} \wedge B(U_u))]$. Assumiamo che $ur\forall x[A \rightarrow \exists y.By]$. Allora
 $ur\forall x[A \rightarrow \exists y.By] \equiv \forall x(E\{u\}(x) \wedge \{u\}(x)r(A \rightarrow \exists y.By)) \equiv$
 $\forall x(E\{u\}(x) \wedge \forall z(zrA \rightarrow (E\{u\}(x)(z) \wedge \{u\}(x)(y)r\exists y.By)))$. Poniamo $t := \{\{u\}(x)\}(\psi_A)$. Allora $\forall x(E\{u\}(x) \wedge \forall z(zrA \rightarrow (E\{u\}(x)(z) \wedge \{u\}(x)(y)r\exists y.By))) \equiv$
 $\forall(\psi_A rA \rightarrow E_t \wedge tr\exists y.By)$ che per la proposizione 3.12 punto 1. è equivalente a
 $\forall x[A \rightarrow E_t \wedge tr\exists y.By] \equiv \forall x[A \rightarrow E_t \wedge j_2 trBy[y/j_1 t]] \equiv \forall x[A \rightarrow E_t \wedge j_2 trB[y/j_1 t]]$. Prendiamo $t_1 := \bigwedge x.j_1 t$ e $t_2 := \min_v T(t_1, x, v)$. Allora
 $\forall x[A \rightarrow E_t \wedge j_2 trB[y/j_1 t]] \equiv \forall x[A \rightarrow j_2 trB[y/t_1 x]]$. Quest'ultima applicando la definizione di realizzabilità è equivalente a $\forall x[A \rightarrow j(0, j_2 t)r(T_{t_1 x t_2} \wedge B(U_{t_2}))] \equiv$
 $\forall x[A \rightarrow j(t_2, j(0, j_2 t))r\exists u(T_{t_1 x u} \wedge B(U_u))] \equiv$
 $\forall x[\forall m(mrA \rightarrow j(t_2, j(0, j_2 t))r\exists u(T_{t_1 x u} \wedge B(U_u)))] \equiv$
 $\forall x(\bigwedge w.j(t_2, j(0, j_2 t))r[A \rightarrow \exists u(T_{t_1 x u} \wedge B(U_u))]) \equiv$
 $\bigwedge x \bigwedge w.j(t_2, j(0, j_2 t))r\forall x[A \rightarrow \exists u(T_{t_1 x u} \wedge B(U_u))] \equiv$
 $j(t_1, \bigwedge x \bigwedge w.j(t_2, j(0, j_2 t))r\forall x[A \rightarrow \exists u(T_{t_1 x u} \wedge B(U_u))])$.
 Quindi ponendo $t^* := j(t_1, \bigwedge x \bigwedge w.j(t_2, j(0, j_2 t)))$ abbiamo che
 $t^* r \exists z \forall x[A \rightarrow \exists u(T_{z xu} \wedge B(U_u))]$. Si ha così la tesi dato che $\bigwedge u.t^* r F$.

□

Teorema 4.3 (*caratterizzazione della realizzabilità*)

1. $HA + ECT_0 \vdash A \leftrightarrow \exists x(xrA)$
2. $HA + ECT_0 \vdash A \leftrightarrow HA \vdash \exists x(xrA)$

Dimostrazione

1. Per induzione sulla complessità della formula A:

- Per formule primitive $t = s$ abbiamo che:
 TESI: $HA + ECT_0 \vdash t = s \leftrightarrow \exists x(xrt = s)$
 " \rightarrow ": Supponiamo che $t = s$ valga. Allora per la definizione di realizzabilità $t = s \equiv xrt = s$ e per la regola \exists -introduzione $xrt = s \rightarrow \exists x.xrt = s$.
 " \leftarrow ": Supponiamo che $\exists x(xrt = s)$ valga. Allora per il lemma 3.14 punto 1. $xrt = s$ è equivalente a una formula quasi negativa e quindi per la proposizione 3.12 punto 1. $xrt = s \rightarrow t = s$.
- Per $A \equiv B \wedge C$
 IPOTESI INDUTTIVA: $HA + ETC_0 \vdash B \leftrightarrow \exists x(xrB)$
 $HA + ETC_0 \vdash C \leftrightarrow \exists x(xrC)$
 TESI: $HA + ETC_0 \vdash B \wedge C \leftrightarrow \exists x(xrB \wedge C)$
 Per la definizione di realizzabilità $\exists x(xrB \wedge C) \leftrightarrow \exists x(j_1xrB \wedge j_2xrC)$. Ma per ipotesi induttiva $\exists x(j_1xrB \wedge j_2xrC) \leftrightarrow B \wedge C$. Da cui la tesi.
- Per $A \equiv B \rightarrow C$
 IPOTESI INDUTTIVA: $HA + ETC_0 \vdash B \leftrightarrow \exists x(xrB)$
 $HA + ETC_0 \vdash C \leftrightarrow \exists x(xrC)$
 TESI: $HA + ETC_0 \vdash (B \rightarrow C) \leftrightarrow \exists x(xr(B \rightarrow C))$
 Per ipotesi induttiva $(B \rightarrow C) \leftrightarrow (\exists x(xrB) \rightarrow \exists y(yrC))$. Ma in HA vale che $\exists x.A \rightarrow \exists y.B \equiv \forall x(A \rightarrow \exists y.B)$ e quindi $(\exists x(xrB) \rightarrow \exists y(yrC)) \leftrightarrow \forall x(xrB \rightarrow \exists y(yrC))$. Dato che per il lemma 3.14 punto 1. xrB e $\{z\}(x)rc$ sono quasi negative quest' ultima per ETC_0 è equivalente a $\exists z\forall x(xrB \rightarrow \{z\}(x)rc)$, cioè $\exists z.zr(B \rightarrow C)$
- Per $A \equiv \forall x.B$
 IPOTESI INDUTTIVA: $HA + ETC_0 \vdash B \leftrightarrow \exists x(xrB)$
 TESI: $HA + ETC_0 \vdash (\forall x.B) \leftrightarrow \exists x(xr\forall x.B)$
 Certamente $B(y)$ soddisfa l'ipotesi induttiva. Quindi $\forall y.B(y) \leftrightarrow \forall y.\exists x.xrB(y)$. Ma per il lemma 3.14 punto 1. $xrB(y)$ è equivalente a una formula quasi negativa e quindi $\forall y.\exists x.xrB(y)$ per ETC_0 è equivalente a $A\exists z.\forall y.\{z\}(y)rc$ cioè $\exists z.zr\forall y.B(y)$. Da cui la tesi.
- Per $A \equiv \exists x.B$
 IPOTESI INDUTTIVA: $HA + ETC_0 \vdash B(x) \leftrightarrow \exists z(zrB(x))$
 TESI: $HA + ETC_0 \vdash \exists x.B \leftrightarrow \exists x(xr\exists x.B)$
 " \rightarrow ": per ipotesi induttiva $HA + ETC_0 \vdash B(x) \rightarrow \exists z.zrB(x)$. Allora per il

lemma 3.14 punto 1. $zrB(x)$ è equivalente a una formula quasi negativa e quindi per la proposizione 3.12 punto 1.

$HA + ETC_0 \vdash B(x) \rightarrow \exists z.zrB(x) \rightarrow zrB(x)$. Per la definizione di realizzabilità $zrB(x) \rightarrow j(x, z)r\exists x.B(x)$, cioè $zrB(x) \rightarrow \exists x.xr\exists x.B(x)$. Allora $HA + ETC_0 \vdash B(x) \rightarrow \exists x.xr\exists x.B(x)$ dalla quale chiaramente segue che $HA + ETC_0 \vdash \exists x.B(x) \rightarrow \exists x.xr\exists x.B(x)$.

" \leftarrow ": per definizione di realizzabilità $xr\exists x.B(x) \equiv j_2xrB[x/j_1x]$. Allora

$HA + ETC_0 \vdash xr\exists x.B(x) \rightarrow j_2xrB[x/j_1x]$ che per il lemma 3.14 punto 1. è equivalente a una formula quasi negativa e quindi per la proposizione 3.12 punto 1. $j_2xrB[x/j_1x] \rightarrow B[x/j_1x]$. Da quest'ultima segue immediatamente che $HA + ETC_0 \vdash xr\exists x.B(x) \rightarrow \exists x.B(x)$ e quindi anche che $HA + ETC_0 \vdash \exists x.xr\exists x.B(x) \rightarrow \exists x.B(x)$.

- Per $A \equiv B \vee C$

questo caso non è rilevante dato che la disgiunzione può essere espressa con gli altri connettivi e quantificatori.

2. " \rightarrow ": Per induzione sulla lunghezza della deduzione in $HA + ECT_0$.

Come base dell'induzione dobbiamo indicare i termini che realizzano gli assiomi:

- $(A \wedge B) \rightarrow A$ supponiamo che $xrA \wedge B$. Allora $j_1xrA \wedge j_2xrB$ e quindi $\wedge x.j_1xr((A \wedge B) \rightarrow A)$.
- $(A \wedge B) \rightarrow B$: supponiamo che $xrA \wedge B$. Allora $j_1xrA \wedge j_2xrB$ e quindi $\wedge x.j_2xr((A \wedge B) \rightarrow B)$.
- $A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)$: supponiamo che xrA e yrB . Allora $j(x, y)rA \wedge B$ e quindi $\wedge x \wedge y.j(x, y)r(A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B))$.
- $A \rightarrow (A \vee B)$: supponiamo che xrA . Allora $j(0, x)rA \vee B$ e quindi $\wedge x.j(0, x)r(A \rightarrow (A \vee B))$.
- $B \rightarrow (A \vee B)$: supponiamo che xrB . Allora $j(1, x)rA \vee B$ e quindi $\wedge x.j(1, x)r(B \rightarrow (A \vee B))$.
- $(A \rightarrow C) \rightarrow [(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)]$: supponiamo che $xr(A \rightarrow C)$, $yr(B \rightarrow C)$ e $zr(A \vee B)$. Se $j_1z = 0$ allora j_2zrA e quindi $\{x\}(j_2z)rC$. Se invece $j_1z \neq 0$ allora j_2zrB e quindi $\{y\}(j_2z)rC$. È ora chiaro che se t è il termine per questo schema di assioma allora $\{\{t\}(x)\}(y)\}(z)rC$. Di conseguenza $\wedge x \wedge y \wedge z. [(1 \dot{-} sg(j_1z))(\{x\}(j_2z)) + sg(j_1z)(\{y\}(j_2z))]r$
 $((A \rightarrow C) \rightarrow [(B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C)])$
- $A(t) \rightarrow \exists x.Ax$: supponiamo che $urA(t)$. Allora $j(t, u)r\exists x.Ax$ e quindi $\wedge u.j(t, u)r(A(t) \rightarrow \exists x.Ax)$
- $\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (\exists x.A \rightarrow B)$ con x non libera in B : supponiamo che $ur\forall x(A \rightarrow B)$ e $vr(\exists x.A \rightarrow B)$. Allora $j_2vrA[x/j_1v]$ e quindi $\{u\}(j_1v)r(A \rightarrow B)$. Di conseguenza $\{\{u\}(j_1v)\}(j_2v)rB$. Abbiamo quindi che $\wedge u \wedge v.(\{\{u\}(j_1v)\}(j_2v))r(\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (\exists x.A \rightarrow B))$.
- $A \rightarrow (B \rightarrow A)$: supponiamo che urA e $vr(B \rightarrow A)$. Allora $\wedge u \wedge v.ur(A \rightarrow (B \rightarrow A))$.

- $[A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)]$: supponiamo che $ur[A \rightarrow (B \rightarrow C)]$ $vrA \rightarrow B$ e wrA . Allora $\{u\}(w)r(B \rightarrow C)$ e $\{v\}(w)rB$. Quindi $\{\{u\}(w)\}(\{v\}(w))rC$. Abbiamo così che $\bigwedge u \bigwedge v \bigwedge w. \{\{u\}(w)\}(\{v\}(w))r([A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)])$.
- $\forall x.Ax \rightarrow At$: supponiamo che $ur\forall x.Ax$. Allora $\{u\}(t)rAx$ e quindi $\bigwedge u. \{u\}(t)r(\forall x.Ax \rightarrow At)$.
- $\forall x(B \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow \forall x.A)$ con x non libera in B : supponiamo che $ur(\forall x(B \rightarrow A))$, vrB e $xrB \rightarrow A$. Allora $\{u\}(x)rB \rightarrow A$ e quindi $\{\{u\}(x)\}(v)rA$. Da cui $\bigwedge u \bigwedge v \bigwedge x. \{\{u\}(x)\}(v)r(\forall x(B \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow \forall x.A))$.

Dopo aver analizzato gli assiomi logici passiamo ora agli assiomi non logici. Le equazioni sono tutte realizzate da 0 (per esempio un' implicazione tra formule primitive tale che $x = y \rightarrow Sx = Sy$ è realizzata da $\bigwedge u.0$). Quindi l'unico caso non banale è l'induzione. Supponiamo che $ur(A(0) \wedge \forall x(A(x) \rightarrow A(Sx)))$. Allora $j_1urA(0)$ e $j_2ur\forall x(A(x) \rightarrow A(Sx))$. Usando il fatto che le funzioni parziali ricorsive sono chiuse per ricorsione, definiamo un indice $t(u)$ tale che

$$\{t(u)\}(0) \simeq j_1u,$$

$$\{t(u)\}(Sx) \simeq \{\{j_2u\}(x)\}(\{t(u)\}(x)).$$

Allora $\{t(u)\}(x)rA(x)$ e così $\bigwedge u.t(u)r(A(0) \wedge \forall x(A(x) \rightarrow A(Sx)) \rightarrow \forall x.A(x))$.

" \leftarrow ": segue dal punto 1.. Infatti supponiamo che $HA \vdash \exists x(xrA)$. Allora anche $HA + ECT_0 \vdash \exists x(xrA)$ e quindi per 1. segue che $HA + ECT_0 \vdash A$.

□

4.2 Disjunction and Existence Property

Teorema 4.4 (*DISJUNCTION AND EXISTENCE PROPERTY*):

1. se $HA \vdash A \vee B$ con A e B chiuse allora $HA \vdash A$ o $HA \vdash B$
2. se $HA \vdash \exists x.A(x)$ e $\exists x.A(x)$ è chiusa allora esiste un numero n tale che $HA \vdash A(n)$

Dimostrazione

1. Supponiamo che $HA \vdash A \vee B$. Allora vale anche che $HA + ETC_0 \vdash A \vee B$. Ma per il teorema 4.3 punto 2. $HA \vdash \exists x(xrA \vee B)$. Per la definizione di realizzabilità $HA \vdash \exists x((j_1x = 0 \wedge j_2xrA) \vee (j_1x \neq 0 \wedge j_2xrB))$, cioè $HA \vdash (j_1x = 0 \wedge j_2xrA) \vee (j_1x \neq 0 \wedge j_2xrB)$. Abbiamo così che $HA \vdash j_1x = 0 \wedge j_2xrA$ o $HA \vdash j_1x \neq 0 \wedge j_2xrB$. Ma per il lemma 3.14 j_2xrA e j_2xrB sono equivalenti a una formula quasi negativa e quindi per la proposizione 3.12 $HA \vdash A$ o $HA \vdash B$.
2. Supponiamo che $HA \vdash \exists x.A(x)$. Allora vale anche che $HA + ETC_0 \vdash \exists x.A(x)$. Quindi per il teorema 4.3 punto 2. $HA \vdash \exists x(xr\exists x.A(x))$ che per la definizione di realizzabilità diventa $HA \vdash \exists x(j_2xrA(j_1x))$. Ma per il lemma 3.14 $j_2xrA(j_1x)$ è equivalente a una formula quasi negativa e quindi per la proposizione 3.12 $HA \vdash A(j_1x)$ cioè esiste un numero n tale che $HA \vdash A(n)$.

□

Teorema 4.5 *In PA vale che:*

1. *PA $\not\models$ Disjunction Property*
2. *PA $\not\models$ Existence Property*

Dimostrazione Ricordiamo che se $G \in \text{Frm}(\mathcal{L}_{PA})$ allora per il *Teorema di Gödel* $PA \not\models G$ e $PA \not\models \neg G$. Possiamo quindi dimostrare 1. e 2. come segue:

1. In PA vale il principio del *Terzo Escluso*, cioè $PA \vdash G \vee \neg G$. Infatti una sua dimostrazione in deduzione naturale (vedi Appendice ...) è:

$$\begin{array}{c}
 \frac{[\neg G]}{G \vee \neg G} \quad \frac{[G]}{G \vee \neg G} \\
 \frac{}{\perp} \quad \frac{}{\perp} \\
 \frac{}{G} \quad \frac{}{\neg G} \\
 \hline
 \frac{}{\perp} \\
 \frac{}{G \vee \neg G}
 \end{array}$$

Ma per il *Teorema di Gödel* $PA \not\models G$ e $PA \not\models \neg G$ e quindi in PA non vale la *Disjunction Property*.

2. Dobbiamo dimostrare che se $PA \vdash \exists x.A(x)$ allora $PA \not\models A(n)$. Prima di tutto notiamo che $PA \vdash \exists x((x = 0 \wedge G) \vee (x = 1 \wedge \neg G))$. Infatti:

$$\begin{array}{c}
 \frac{G}{0 = 0 \wedge G} \quad \frac{\neg G}{1 = 1 \wedge \neg G} \\
 \frac{(0 = 0 \wedge G) \vee (0 = 1 \wedge \neg G)}{\exists x((x = 0 \wedge G) \vee (x = 1 \wedge \neg G))} \quad \frac{(1 = 0 \wedge G) \vee (1 = 1 \wedge \neg G)}{\exists x((x = 0 \wedge G) \vee (x = 1 \wedge \neg G))} \\
 \hline
 \frac{}{\exists x((x = 0 \wedge G) \vee (x = 1 \wedge \neg G))}
 \end{array}$$

Supponiamo per assurdo che l'Existence Property valga, cioè se $PA \vdash \exists x((x = 0 \wedge G) \vee (x = 1 \wedge \neg G))$ allora esiste un numero n tale che $PA \vdash (n = 0 \wedge G) \vee (n = 1 \wedge \neg G)$. Abbiamo quindi tre casi:

- $n = 0$: $PA \vdash (0 = 0 \wedge G) \vee (0 = 1 \wedge \neg G)$ che vale se e solo se $PA \vdash G$ che è assurdo perchè per il *Teorema di Gödel* $PA \not\models G$.
- $n = 1$: $PA \vdash (1 = 0 \wedge G) \vee (1 = 1 \wedge \neg G)$ che vale se e solo se $PA \vdash \neg G$ che è assurdo perchè per il *Teorema di Gödel* $PA \not\models \neg G$.
- $n = m \neq 0, 1$: $PA \vdash \forall m(m \neq 0 \wedge m \neq 1 \rightarrow \exists y.m = ss(y))$

[illegible]

□