المعادلات التفاضليّة

١٠ من ذي الحجة ١٤٣٢ هـ
٦ نوفمبر ٢٠١١ م

نعتبر عائلة من المنحنيات (C_λ) المرتبطة بالوسيط الحقيقي λ.
المسارات المتعامدة للمنحنيات

$$(C_\lambda)$$

هي المنحنيات (Γ) التي تُحقِّق : إذا كانت M نقطة تقاطع (C_λ) مع (Γ) فإنّ المماسات للمُنحَنَيَين عند M متعامدان.
إذا كانت المنحنيات (C_λ) حلولاً للمعادلة التفاضلية

$$f\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = 0$$

فإنّ ميل المماس للمنحني (C_λ) عند النقطة M يساوي $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$؛ و بالتالي (التعامد) فإنّ ميل المماس للمنحني (Γ) عند النقطة M يساوي $-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$.
أي أنّه يجب البحث عن المنحنيات (Γ) بكونها حلولاً للمعادلة

$$f\left(x, z, -\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right) = 0$$

عيِّن المسارات المتعامدة للدوائر (C_λ) التي يقع مركزُها على المِحور (Ox) و نصف قطرها R (عدد ثابت).

عيِّن المسارات المتعامدة للمنحنيات (C_λ) المُعرَّفة بالمعادلة

$$(C_\lambda) \qquad x(x^2 + y^2) = \lambda y^2$$

I) المعادلات الخطية من الدرجة الثانية

نحصل على الحلّ العام لمثل هذا النوع من المعادلات بجمع حلّ خاص لها مع الحلّ العام للمعادلة المتجانسة (بدون الطرف الثاني).

عندما تكون المعادلة المتجانسة (بدون الطرف الثاني) ثابتة فإنّ شكل حلِّها العام مُرتبط بإشارة العدد الحقيقي $\Delta = b^2 - 4ac$.

١. إذا كان $\Delta > 0$ فإنّ للمعادلة حلّين حقيقيَين $\alpha,\ \beta$ و الحلّ العام للمعادلة هو

$$y = \lambda e^{\alpha x} + \mu e^{\beta x} \qquad (\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}).$$

٢. إذا كان $\Delta = 0$ فإنّ للمعادلة حلّ مضاعف α و الحل العام للمعادلة هو

$$y = \lambda e^{\alpha x} + \mu x e^{\alpha x} \qquad (\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}).$$

٣. إذا كان $\Delta < 0$ فإنّ للمعادلة حلّين مركّبين (تخيّلِيَيْن) مترافِقَيْن $\alpha + \imath\beta,\ \alpha - \imath\beta$ و الحلّ العام للمعادلة هو

$$y = \lambda e^{\alpha x} \cos \beta x + \mu e^{\alpha x} \sin \beta x \qquad (\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}).$$