

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1.

# ΕΙΣΑΓΩΓΗ

### 1..1 Εισαγωγή

Η εισαγωγή περιέχει μια σύντομη επισκόπηση των περιεχομένων του βιβλίου, περιγράφοντας συνοπτικά τα βασικά σημεία κάθε κεφαλαίου.

### 1..2 Σύντομη περίληψη ανά κεφάλαιο

Το 2ο κεφάλαιο μας εισάγει στους πίνακες και την αντίστοιχη γραμμική άλγεβρα. Πίνακας είναι μια ορθογώνια διάταξη αριθμών, ο οποίος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αναπαριστά συνοπτικά σύνολα εξισώσεων, συνδέσεις δικτύου, εξελικτικά δυναμικά συστήματα και ούτω καθεξής. Η χρήση των πινάκων γίνεται απαραίτητη για την αποτελεσματική μελέτη των μεγάλων συστημάτων. Το παρακάτω παράδειγμα απεικονίζει το όφελος των πινάκων όταν μεταφερόμαστε από προβλήματα μιας εξίσωσης σε συστήματα εξισώσεων.

Στο μοντέλο προσφοράς και ζήτησης, η ζήτηση ( $D$ ) για κάποιο αγαθό σχετίζεται αρνητικά με την τιμή και η προσφορά ( $S$ ) σχετίζεται θετικά. Έτσι,  $D = \alpha - \beta p$ , όπου  $p$  είναι η τιμή του προϊόντος. Τα γράμματα  $\alpha$  και  $\beta$  υποδηλώνουν παραμέτρους του μοντέλου με  $\alpha > 0$ , δείχνοντας ότι η αύξηση της τιμής μειώνει τη ζήτηση. Η μαθηματική διατύπωση της προσφοράς είναι παρόμοια, με την διαφορά ότι η προσφορά θα έπρεπε να σχετίζεται θετικά με την τιμή, οπότε παίρνουμε ως αξίωμα ότι  $\delta > 0$  στη σχέση  $S = \gamma + \delta p$ . Ο συνδυασμός αυτών των δύο σχέσεων μας δίνει το

μοντέλο προσφοράς και ζήτησης:

$$\begin{aligned} D &= \alpha - \beta p, \alpha > 0, \beta > 0 \\ S &= \gamma + \delta p, \gamma < 0, \delta > 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Σε ποια τιμή πωλείται το αγαθό και σε τι ποσότητα; Η παραδοχή της εκκαθάρισης της αγοράς συνεπάγεται ότι η τιμή εκκαθάρισής της θα υπερिσχύσει. Δηλώνοντας ως  $p_e$  την τιμή στην οποία η προσφορά ισοδυναμεί με τη ζήτηση, τότε  $D_e = \alpha - \beta p_e = \gamma + \delta p_e = S_e$ . Με αναδιάταξη της σχέσης  $\alpha - \beta p_e = \gamma + \delta p_e$  προκύπτει ότι  $(\alpha - \gamma) = (\beta + \delta)p_e$ . Διαιρώντας και τα δυο μέλη με  $(\beta + \delta)$  λαμβάνουμε την τιμή ισορροπίας  $p_e = \frac{(\alpha - \gamma)}{(\beta + \delta)}$ . Εφόσον σε αυτή την τιμή η ποσότητα που ζητείται ισούται με την προσφερόμενη ποσότητα, μπορούμε να ορίσουμε την ποσότητα ισορροπίας η οποία συμβολίζεται με  $Q_e$ . Βρίσκουμε τον τύπο του  $Q_e$  αντικαθιστώντας το  $p_e$  είτε στον τύπο της προσφοράς είτε της ζήτησης:  $Q_e = \alpha - \beta p_e = \alpha - \beta \left[ \frac{(\alpha - \gamma)}{(\beta + \delta)} \right] = \frac{(\delta\alpha + \beta\gamma)}{(\beta + \delta)}$ . Συνοψίζοντας:

$$p_e = \frac{(\alpha - \gamma)}{(\beta + \delta)}, \quad Q_e = \frac{(\delta\alpha + \beta\gamma)}{(\beta + \delta)}. \quad (1.2)$$

Σε πολλαπλές αγορές, οι υπολογισμοί γίνονται πιο σύνθετοι και παρακινούν τη χρήση των πινάκων.

Με δύο (ή περισσότερες) αγορές, μπορεί να υπάρξουν επιπτώσεις μεταξύ των τιμών: η τιμή του ψωμιού μπορεί να επηρεάσει τη ζήτηση μαργαρίνης, η τιμή του τσαγιού μπορεί να επηρεάσει τη ζήτηση για καφέ. Ως εκ τούτου, οι υπολογισμοί για τον καθορισμό των τιμών και των ποσοτήτων εκκαθάρισης της αγοράς καθίστανται πιο περίπλοκοι. Για να αποτυπώσετε αυτές τις επιπτώσεις σε σχέση με τις τιμές, γράψτε τη ζήτηση και την προσφορά και στις δύο αγορές:

$$\text{Αγορά 1: } D_1 = \alpha_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2, \quad S_1 = b_0 + b_1 p_1 + b_2 p_2$$

$$\text{Αγορά 2: } D_2 = \alpha_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2, \quad S_2 = \beta_0 + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2.$$

Η ισορροπία συμβαίνει όταν οι τιμές εξισώνουν την προσφορά και τη ζήτηση και στις δύο αγορές ( $D_1 = S_1$  και  $D_2 = S_2$ ). Για να βρούμε το επίπεδο ισορροπίας της ποσότητας και της τιμής σε κάθε αγορά εξισώνουμε την προσφορά με τη ζήτηση στη κάθε αγορά.

$$\text{Αγορά 1: } D_1 = S_1 \quad \text{or} \quad \alpha_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 = b_0 + b_1 p_1 + b_2 p_2$$

Αγορά 2:  $D_2 = S_2$  or  $\alpha_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 = \beta_0 + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2$ .

Αναδιατυπώνοντας τις εξισώσεις προκύπτει:

$$(\alpha_1 - b_1)p_1 + (\alpha_2 - b_2)p_2 = (b_0 - \alpha_0)$$

$$(\alpha_1 - \beta_1)p_1 + (\alpha_2 - \beta_2)p_2 = (\beta_0 - \alpha_0).$$

Οι εξισώσεις αυτές μπορούν να λυθούν με αντικατάσταση. Ωστόσο, η διαδικασία είναι κουραστική. Από την πρώτη εξίσωση έχουμε

$$p_1 = \frac{(b_0 - \alpha_0)}{(\alpha_1 - b_1)} - \frac{(\alpha_2 - b_2)}{(\alpha_1 - b_1)} p_2.$$

Αντικαθιστώντας στην δεύτερη εξίσωση προκύπτει:

$$(\alpha_1 - \beta_1) \left[ \frac{(b_0 - \alpha_0)}{(\alpha_1 - b_1)} - \frac{(\alpha_2 - b_2)}{(\alpha_1 - b_1)} p_2 \right] + (\alpha_2 - \beta_2)p_2 = (\beta_0 - \alpha_0).$$

Επιλέγοντας στο πρώτο μέλος τους όρους με το  $p_2$  προκύπτει:

$$\left[ (\alpha_2 - \beta_2) - (\alpha_1 - \beta_1) \frac{(\alpha_2 - b_2)}{(\alpha_1 - b_1)} \right] p_2 = (\beta_0 - \alpha_0) - (\alpha_1 - \beta_1) \frac{(b_0 - \alpha_0)}{(\alpha_1 - b_1)}.$$

Πολλαπλασιάζοντας και στα δυο μέλη με  $(\alpha_1 - b_1)$  προκύπτει:

$$\begin{aligned} [(\alpha_2 - \beta_2)(\alpha_1 - b_1) - (\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_2 - b_2)] p_2 = \\ = (\beta_0 - \alpha_0)(\alpha_1 - b_1) - (\alpha_1 - \beta_1)(b_0 - \alpha_0). \end{aligned}$$

Οπότε,

$$p_2 = \frac{[(\beta_0 - \alpha_0)(\alpha_1 - b_1) - (\alpha_1 - \beta_1)(b_0 - \alpha_0)]}{[(\alpha_2 - \beta_2)(\alpha_1 - b_1) - (\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_2 - b_2)]}.$$

Με παρόμοιο υπολογισμό προκύπτει το  $p_1$ . Με τρεις ή περισσότερες εξισώσεις η διαδικασία γίνεται προοδευτικά πιο περίπλοκη. Η χρήση της άλγεβρας των πινάκων απλοποιεί σημαντικά προβλήματα αυτού του είδους. Σε μορφή πινάκων είναι:

$$\begin{pmatrix} (\alpha_1 - b_1) & (\alpha_2 - b_2) \\ (\alpha_1 - \beta_1) & (\alpha_2 - \beta_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 - \alpha_0 \\ \beta_0 - \alpha_0 \end{pmatrix}$$

ή

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha_1 - b_1) & (\alpha_2 - b_2) \\ (\alpha_1 - \beta_1) & (\alpha_2 - \beta_2) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_0 - \alpha_0 \\ \beta_0 - \alpha_0 \end{pmatrix}.$$

Ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} (\alpha_1 - b_1) & (\alpha_2 - b_2) \\ (\alpha_1 - \beta_1) & (\alpha_2 - \beta_2) \end{pmatrix}^{-1}$$

λέγεται αντίστροφος του

$$\begin{pmatrix} (\alpha_1 - b_1) & (\alpha_2 - b_2) \\ (\alpha_1 - \beta_1) & (\alpha_2 - \beta_2) \end{pmatrix}.$$

Ο αντίστροφος πίνακας μπορεί να γραφτεί (λεπτομέρειες αργότερα):

$$\begin{pmatrix} (\alpha_1 - b_1) & (\alpha_2 - b_2) \\ (\alpha_1 - \beta_1) & (\alpha_2 - \beta_2) \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{d} \begin{pmatrix} (\alpha_2 - \beta_2) & -(\alpha_2 - b_2) \\ -(\alpha_1 - \beta_1) & (\alpha_1 - b_1) \end{pmatrix},$$

όπου  $d = (\alpha_1 - b_1)(\alpha_2 - \beta_2) - (\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_2 - b_2)$ . Άρα,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{d} \begin{pmatrix} (\alpha_2 - \beta_2) & -(\alpha_2 - b_2) \\ -(\alpha_1 - \beta_1) & (\alpha_1 - b_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (b_0 - \alpha_0) \\ (\beta_0 - \alpha_0) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{d} \begin{pmatrix} (\alpha_2 - \beta_2)(b_0 - \alpha_0) - (\alpha_2 - b_2)(\beta_0 - \alpha_0) \\ -(\alpha_1 - \beta_1)(b_0 - \alpha_0) + (\alpha_1 - b_1)(\beta_0 - \alpha_0) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{[(\alpha_2 - \beta_2)(b_0 - \alpha_0) - (\alpha_2 - b_2)(\beta_0 - \alpha_0)]}{[(\alpha_1 - b_1)(\alpha_2 - \beta_2) - (\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_2 - b_2)]} \\ p_2 &= \frac{[-(\alpha_1 - \beta_1)(b_0 - \alpha_0) + (\alpha_1 - b_1)(\beta_0 - \alpha_0)]}{[(\alpha_1 - b_1)(\alpha_2 - \beta_2) - (\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_2 - b_2)]}. \end{aligned}$$

Το αρχικό μέρος του 2ου κεφαλαίου περιγράφει τους βασικούς κανόνες για τη χρήση πινάκων και την επίλυση συστημάτων εξισώσεων. Δεν έχουν όλα τα συστήματα μια λύση και ορισμένα συστήματα εξισώσεων μπορεί να έχουν πολλές λύσεις. Αυτό οδηγεί στο καθήκον του προσδιορισμού πότε τα συστήματα εξισώσεων έχουν λύση και των συνθηκών κάτω από τις οποίες υπάρχει μια μοναδική λύση. Οι βασικές ιδέες

της τάξης και της γραμμικής ανεξαρτησίας εισάγονται με σκοπό να μελετηθεί αυτό το ζήτημα. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με μερικές επιπλέον παρατηρήσεις στην άλγεβρα πινάκων.

Στο 3ο κεφάλαιο, οι τεχνικές πινάκων χρησιμοποιούνται για να απεικονίσουν τις πολλές χρήσεις της άλγεβρας πινάκων. Αυτές περιλαμβάνουν γραμμικά συστήματα ζήτησης, τεχνικές εισόδου-εξόδου, στοχαστικές διαδικασίες Markov και αναλλοίωτες κατανομές, καθώς και εκτίμηση των ελαχίστων τετραγώνων. Για να διευκρινισθεί περισσότερο, εξετάστε την ανάλυση εισροών-εκροών, όπου η οικονομία αντιμετωπίζεται ως ένας αριθμός αλληλένδετων βιομηχανιών (ν το πλήθος βιομηχανιών). Η παραγωγή μιας βιομηχανίας χρησιμοποιείται για την τελική κατανάλωση και για την παραγωγή άλλων προϊόντων. Η συνολική παραγωγή ενός κλάδου κατανέμεται μεταξύ εκείνων που χρησιμοποιείται στην παραγωγή άλλων κλάδων (ζήτηση μεταξύ βιομηχανιών) και κατανάλωσης ή τελικής ζήτησης. Ο σχεδιασμός για την επίτευξη ορισμένων (στοχευόμενων) επιπέδων κατανάλωσης ή τελικής ζήτησης συνεπάγεται έμμεσα επίπεδα παραγωγής σε κάθε κλάδο βιομηχανιών. Η εισροών-εκροών ανάλυση αφορά τον καθορισμό των επιπέδων παραγωγής που απαιτούνται για τη διατήρηση ή την επίτευξη των στοχευόμενων επιπέδων σε όλο το φάσμα των τελικών απαιτήσεων. Στη συνέχεια αναπτύσσεται ένα απλό μοντέλο για να απεικονίσει τη διαδικασία. Η συζήτηση επεξηγεί τη μέθοδο και τη χρήση των διάφορων μεθόδων πινάκων ώστε να καθοριστεί το αναγκαίο επίπεδο παραγωγής ενός βιομηχανικού κλάδου.

Ας θέσουμε  $\alpha_{ij}$  = ποσότητα του  $i$  που απαιτείται για την παραγωγή 1 μονάδας του  $j$ ,  $x_i$  = παραγωγή του  $i$  και  $f_i$  = τελική ζήτηση για  $i$ . Επίσης, αν  $x_j$  είναι η ποσότητα του προϊόντος  $j$  που παράγεται, τότε  $\alpha_{ij}x_j$  είναι η ποσότητα του  $i$  που απαιτείται για την παραγωγή του  $j$ . (Εάν παραχθεί ένα κιλό προϊόντος  $j$ , το  $\alpha_{ij}$  είναι το κλάσμα του ενός κιλού προϊόντος  $i$  που χρησιμοποιείται για την παραγωγή του κιλού του  $j$ .) Η παραγωγή της βιομηχανίας  $i$  κατανέμεται στη παραγωγή άλλων βιομηχανιών ( $\alpha_{ij}x_j$ ) και στην τελική ζήτηση ( $f_i$ ). Έτσι,

$$x_i = \alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \dots + \alpha_{in}x_n + f_i, i = 1, \dots, n.$$

Αυτό μπορεί να μετασχηματιστεί σε:

$$-\alpha_{i1}x_1 - \alpha_{i2}x_2 \dots + (1 - \alpha_{ii})x_i \dots - \alpha_{in}x_n = f_i, i = 1, \dots, n.$$

ή, σε μορφή πινάκων:

$$\begin{pmatrix} (1 - \alpha_{11}) & -\alpha_{12} & \cdots & -\alpha_{1n} \\ -\alpha_{21} & (1 - \alpha_{22}) & \cdots & -\alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_{n1} & -\alpha_{n2} & \cdots & (1 - \alpha_{nn}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Αυτή η έκφραση μπορεί να γραφτεί συνοπτικά και ως:  $(I - A)x = f$ , όπου οι πίνακες  $A$  και  $I$  είναι οι ακόλουθοι:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$